

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Analyse

On obtient facilement un équivalent de u_n en $+\infty$. Il permet de justifier la convergence.

Le calcul de la somme requiert au préalable d'avoir décomposé la fraction $\frac{1}{n^2(n+1)}$ en éléments simples.

Résolution

On a d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2(n+1)} > 0$. On a donc affaire à une série à termes positifs.

On a ensuite : $u_n = \frac{1}{n^2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. Or, $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (l'exposant de n est strictement supérieur à 1). On en déduit finalement :

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Il vient ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}$$

La somme partielle : $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2(i+1)}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i+1} \right) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = -1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat classique : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, il vient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Résultat final

La série $\sum \frac{1}{n^2(n+1)}$ converge et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1$