Etudier la converge et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n^2}{n!}$$

Analyse

La forme de u_n avec, notamment, la factorielle au dénominateur suggère d'utiliser le critère de d'Alembert.
Le calcul de la somme ne pose pas de difficulté particulière et consiste, pour l'essentiel, à simplifier l'expression de u_n et à changer de variable.

Résolution

On a d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^2}{n!} > 0$. On a donc affaire à une série à termes positifs.

On a ensuite :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Il vient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et le critère de d'Alembert nous permet de conclure :

La série de terme général $u_n = \frac{n^2}{n!}$ est convergente.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + e = e + e \\
&= \boxed{2e}
\end{aligned}$$

Résultat final

La série $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$.