Etudier la converge et, le cas échéant, calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

où a et b sont deux paramètres réels.

Analyse

Dans un premier temps, il convient de s'intéresser à $\lim_{n\to+\infty} u_n$ (il faut que cette limite soit nulle pour qu'il y ait convergence). Dans un second temps, on peut rechercher un équivalent de u_n en $+\infty$ …

Résolution

On a d'abord, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) \\
&= \ln n + a\ln n + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln n + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= (1+a+b)\ln n + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)
\end{aligned}$$

Pour tout couple (a,b) de réels tels que $1+a+b \neq 0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Nous supposons donc, à partir de maintenant, que l'on a : $1+a+b=0$.

Nous pouvons donner un développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
u_n &= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\times\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Pour tout couple (a,b) de réels tels que $a+2b\neq 0$, u_n va donc garder un signe constant à partir d'un certain rang et on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a+2b}{n}$.
La série de terme général u_n est donc de même nature que la série harmonique. Or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

On suppose maintenant que l'on a : $a+2b=0$.

Comme on avait déjà $1+a+b=0$, les réels a et b sont les solutions du système :

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases}$$

On obtient facilement : $a=-2$ et $b=1$.

Le développement limité obtenu ci-dessus se récrit alors : $u_n = -\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

u_n va donc garder un signe constant à partir d'un certain rang et on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$.
La série de terme général u_n est donc de même nature que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. On en déduit que $\sum u_n$ converge.

On a alors, en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[-2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)\right] = -2\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+2}{k} \\
&= -2\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)+\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}\right) = -2\ln(n+1)+\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)}\right) \\
&= -2\ln(n+1)+\ln\left(\frac{3\times 2}{1\times 2}\times\frac{4\times 3}{2\times 3}\times\frac{5\times 4}{3\times 4}\times\ldots\times\frac{(n+1)n}{(n-1)n}\times\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+1)}\right) \\
&= \ln\frac{1}{(n+1)^2}+\ln\frac{\frac{1}{2}(n+1)!(n+2)!}{n!(n+1)!} = \ln\frac{1}{(n+1)^2}-\ln 2+\ln\frac{(n+2)!}{n!} \\
&= -\ln 2+\ln\left[(n+2)(n+1)\right]+\ln\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= -\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

On a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$ et donc : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln 1 = 0$.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln 2$.

Résultat final

La série de terme général $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge pour $(a;b) = (-2;+1)$ et on a alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$.