On considère la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

où a est un réel strictement positif.

1. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
2. Donner un équivalent de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$.

Analyse

On a affaire à une série à termes positifs dont on peut facilement donner un équivalent du terme général …

Résolution

1. Pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $1+\frac{a}{n} > 1$ et, de fait : $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) > 0$.

   On a donc affaire à une série à termes positifs.

   On a par ailleurs : $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n}$. Or, la série de terme général $\frac{a}{n}$ est divergente (série harmonique … à un facteur multiplicatif près). On en conclut :

$$\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \text{ est divergente.}}$$

2. Les séries $\sum \frac{a}{n}$ et $\sum \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ sont à termes positifs, les termes généraux sont équivalents et elles divergent. Les sommes partielles sont donc équivalentes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}$$

Or, on a le résultat classique : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\underset{+\infty}{\sim}\ln n$. On en tire : $\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\underset{+\infty}{\sim}a\ln n$ et, finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\underset{+\infty}{\sim}a\ln n}$$

Résultat final

La série de terme général $u_n=\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ ($a>0$) diverge et on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}a\ln n$$