On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}$$

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Etudier la nature de $\sum u_n$ (indication : on posera $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + v_n$).

Analyse

On a affaire à une série alternée dont la valeur absolue du terme général n'est pas décroissante. Dans la première question, on trouve un équivalent simple de $|u_n|$ qui permet de conclure rapidement. Dans la deuxième question, on écrit u_n sous la forme d'une somme et l'étude de $\sum u_n$ se ramène à celle de deux séries.

Résolution

1. On a facilement $0^{\frac{3}{4}} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$ et $1^{\frac{3}{4}} + \cos 1 = 1 + \cos 1 > 1$ (car $0 < 1 < \frac{\pi}{3}$).

   Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et on a :

   $\forall x \in]1;+\infty[,\ x^{\frac{3}{4}} > 1$. Comme, pour tout x réel, on a : $-1 \le \cos x \le 1$, il vient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^{\frac{3}{4}} + \cos n > 0$$

   En définitive : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}$.

   On a également, pour tout entier naturel n non nul :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)}$$

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leq \cos n \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{4}} = +\infty$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{\frac{3}{4}}|u_n|\right) = 1$. Soit : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.

Mais la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ est divergente (série de Riemann et $\dfrac{3}{4} \leq 1$). On en déduit que la série $\sum |u_n|$ est également divergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

2. Comme indiqué, nous posons : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + v_n$.

   On a alors :

$$v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n} - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} = (-1)^n \frac{-\cos n}{n^{\frac{3}{4}}\left(n^{\frac{3}{4}} + \cos n\right)} = (-1)^{n+1} \frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)}$$

   On en tire : $|v_n| = \dfrac{|\cos n|}{n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)}$.

   Or, $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente ($\dfrac{3}{2} > 1$). On en déduit que la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{\cos n}{n^{\frac{3}{4}}}\right)}$ converge puis qu'il en va de même pour la série $\sum |v_n|$.

   La série $\sum v_n$ étant absolument convergente, elle est convergente.

   Par ailleurs, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ est une série alternée.

On a facilement $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} = 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ converge.

En résumé : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + v_n$ et les séries $\sum\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ et $\sum v_n$ convergent. On peut alors en conclure que :

La série $\sum u_n$ est convergente.

Résultat final

La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \cos n}$ converge.