

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Analyse

On montre facilement que le terme général de cette série est de signe constant. Ensuite, un équivalent du terme général permet de conclure quant à la convergence. Enfin, on simplifie l'expression d'une somme partielle quelconque pour pouvoir en calculer la limite.

Résolution

Notons, dans un premier temps, que le terme u_n est défini pour tout entier naturel n supérieur à 2. On a, pour un tel entier : $1 - \frac{1}{n^2} < 1$ et, de fait : $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$.

On en déduit que la série considérée est une série à termes strictement négatifs.

On a immédiatement l'équivalence : $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$. Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Il en va donc de même pour la série $\sum \left(-\frac{1}{n^2}\right)$ et, ensuite, pour la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \ln\left[\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] = \ln\left[\prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)\right] = \ln\left[\prod_{k=2}^n \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k^2}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \prod_{k=3}^{n+1} k}{\left(\prod_{k=2}^n k\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)! \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \end{aligned}$$

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, on a immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Résultat final

La série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et : $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.