

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est semi-convergente.

Analyse

On note que la série considérée est alternée.

Par ailleurs, la présence de la factorielle de n au dénominateur doit nous faire penser à la formule de Stirling. Elle nous donne en rapidement un équivalent de $|u_n|$.

Résolution

On a clairement affaire à une série alternée (premier terme : u_1) de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$$

Par ailleurs, en posant : $v_n = \ln \frac{1}{|u_n|} = \frac{1}{n} \ln(n!)$, on obtient, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} \ln[(n+1)!] - \frac{1}{n} \ln(n!) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \{n \ln[(n+1)!] - (n+1) \ln(n!)\} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} [n \ln(n+1) + \cancel{n \ln(n!)} - \cancel{(n+1) \ln(n!)} - \ln(n!)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} [n \ln(n+1) - \ln(n!)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \{[\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+1) - \ln(n-1)] + \dots + [\ln(n+1) - \ln 1]\} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(n+1) - \ln(n-k)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{n+1}{n-k} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel k dans $\llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$, on a : $0 < n-k < n+1$, d'où : $\ln \frac{n+1}{n-k} > 0$ et, finalement : $v_{n+1} - v_n > 0$.

La suite $(v_n) = \left(\ln \frac{1}{|u_n|} \right)$ est donc strictement croissante.

On en déduit alors que la suite $(|u_n|)$ est strictement décroissante.

Rappelons enfin que l'on a l'équivalence (formule de Stirling) : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

On en tire immédiatement : $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = (2\pi n)^{\frac{1}{n}} \times \frac{n}{e}$.

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi n)^{\frac{1}{n}} = 1$ (considérer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[(2\pi n)^{\frac{1}{n}} \right]$), il vient : $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$, soit : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Les résultats précédents nous permettent de conclure, d'après le théorème spécial des séries alternées, que la série $\sum u_n$ converge.

Mais l'équivalence $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$ nous permet également de conclure, la série $\sum \frac{e}{n}$ étant divergente (comme la série harmonique), que la série $\sum |u_n|$ est divergente.

En définitive, la série $\sum u_n$ est bien semi-convergente.

Résultat final

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est semi-convergente.