Etudier la série de terme général $u_n = a^{\ln n}$, où a est un réel strictement positif.

Analyse

On montre facilement que l'on a affaire à une série de Riemann. L'utilisation du cours est alors immédiate.
Dans ce qui suit, nous adoptons néanmoins une démarche un peu plus générale en commençant par déterminer les situations de divergence grossière de la série.

Résolution

On a immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\ln a \times \ln n\right) = -\infty \Leftrightarrow \ln a < 0 \Leftrightarrow a \in \left]0\,;1\right[$$

Pour $a = 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1$ et pour $a > 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Dans les deux cas, la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

On suppose donc, dans ce qui suit : $0 < a < 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = a^{\ln n} = e^{\ln n \times \ln a} = n^{\ln a} = n^{-\ln\frac{1}{a}} = \frac{1}{n^{\ln\frac{1}{a}}}$$

Nous avons donc affaire à une série de Riemann.
On a donc : $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\ln\frac{1}{a} > 1$.
Or : $\ln\frac{1}{a} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > e \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$.
Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si : $a < \frac{1}{e}$.

Résultat final

La série $\sum a^{\ln n}$ ($a > 0$) converge pour : $a < \frac{1}{e}$ et diverge pour $a \geq \frac{1}{e}$
(pour $a \geq 1$, la divergence est grossière)