Donner un équivalent de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

Indication : on utilisera une comparaison à une intégrale.

Analyse

Le théorème de comparaison à une intégrale s'exploite en deux temps : d'une part pour donner la nature de la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$, d'autre part, pour fournir l'équivalent demandé.

Résolution

Considérons la fonction *f* définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

Elle y est continue comme inverse du produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Comme la fonction logarithme népérien prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, il en va de même pour la fonction *f*.

Enfin, la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto x \ln x$ strictement croissante et de la fonction inverse strictement décroissante sur cet intervalle.

Par comparaison à une intégrale, nous pouvons affirmer que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est de même nature que la suite $\left(\int_2^n \frac{dx}{x \ln x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Or, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on a, en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (qui donne $dt = \frac{dx}{x}$) :

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{\ln 2}^{\ln n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} \int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{n\to+\infty} \left[\ln(\ln n) - \ln(\ln 2)\right] = +\infty$.

On en conclut que la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$ diverge. Plus précisément, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=+\infty$$

Le théorème de comparaison à une intégrale nous permet également d'affirmer que la série de terme général $\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x\ln x}-\frac{1}{n\ln n}$ converge. Notons S sa somme.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la somme partielle s'écrit :

$$\sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x\ln x}-\frac{1}{k\ln k}\right)=\sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x\ln x}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\int_{2}^{n}\frac{dx}{x\ln x}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}+\frac{1}{2\ln 2}$$

On a : $\int_{2}^{n}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{\ln n}\frac{dt}{t}=[\ln t]_{\ln 2}^{\ln n}=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)$.

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x\ln x}-\frac{1}{k\ln k}\right)&=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}+\frac{1}{2\ln 2}\\&=\ln(\ln n)-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln 2)+\frac{1}{2\ln 2}\end{aligned}$$

Puis : $\frac{\sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x\ln x}-\frac{1}{k\ln k}\right)}{\ln(\ln n)}=1-\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)}+\frac{-\ln(\ln 2)+\frac{1}{2\ln 2}}{\ln(\ln n)}$

La convergence de la série entraîne : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=3}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x\ln x}-\frac{1}{k\ln k}\right)}{\ln(\ln n)}=0$ et on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}u_n\frac{-\ln(\ln 2)+\frac{1}{2\ln 2}}{\ln(\ln n)}=0$. On en déduit donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)}=1$, soit, finalement :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\underset{+\infty}{\sim}\ln(\ln n)$$

Résultat final

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\underset{+\infty}{\sim}\ln(\ln n)$$