Donner un équivalent de :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Indication : on utilisera une comparaison à une intégrale.

Analyse

Le théorème de comparaison à une intégrale permet d'exploiter classiquement la convergence d'une certaine série.

Résolution

Considérons la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Elle y est continue comme inverse d'une fonction continue sur cet intervalle.
Comme la fonction racine carrée prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, il en va de même pour la fonction *f*.

Enfin, la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ à valeurs dans $[1\,;+\infty[$ strictement croissante et de la fonction inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur cet intervalle.

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann divergente). Plus précisément, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$$

Le théorème de comparaison à une intégrale nous permet d'affirmer que la série de terme général $\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. Notons S sa somme.

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, la somme partielle S_n s'écrit :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_{1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n &= \int_1^{2n}\frac{dx}{\sqrt{x}}-\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\left(\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\
&= \int_n^{2n}\frac{dx}{\sqrt{x}}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \left[2\sqrt{x}\right]_n^{2n}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= 2\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n}\right)-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}\left(1-\frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{S}_{2n}=\mathrm{S}$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n\right)=0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}\right]=+\infty$ alors on a nécessairement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}}\right]=0$,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}}\right]=1$. Finalement :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\sim}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$$

Résultat final

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\sim}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$$