Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Analyse

Ne pas oublier, avant toute autre chose, que la première étape de l'étude d'une série consiste à étudier la limite de son terme général …

Résolution

On distingue deux situations selon que la suite (u_n) tend ou non vers 0.

1^{er} cas : la suite (u_n) tend vers 0

Dans ce cas, on peut donner le développement limité :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} = u_n(1+u_n)^{-1} = u_n\left(1-u_n+\mathrm{o}(u_n)\right) = u_n - u_n^2 + \mathrm{o}\left(u_n^2\right)$$

On en déduit : $v_n - u_n = -u_n^2 + \mathrm{o}\left(u_n^2\right) = \mathrm{o}(u_n)$, soit : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Ainsi, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

$2^{\text{ème}}$ cas : la suite (u_n) ne tend pas vers 0

Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Mais on en déduit également que la suite (v_n) ne tend pas vers 0 (en effet, si la suite (v_n) tendait vers 0, il en irait de même de la suite (u_n) en vertu de : $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ (aucun élément de la suite (v_n) ne peut être égal à 1)) et que, de fait, la série $\sum v_n$ diverge grossièrement.

Les deux séries sont encore de même nature.

Résultat final

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.