

Soit  $\sum u_n$  la série de terme général :

$$u_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})}$$

1. Etablir la convergence de  $\sum u_n$ .
2. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  (on introduira la suite  $(a_n)$  telle que pour tout entier naturel  $n$  :  $a_n = (1+\sqrt{n+1})u_n$ ).

---

## Analyse

Une situation intéressante où l'établissement de la convergence de la série est plus délicat que le calcul de sa somme (d'où la première question ...). Malgré une certaine simplicité apparente de l'expression de  $u_n$ , la présence des racines carrées perturbe un peu cette vision des choses. Pour s'en convaincre, nous montrons d'abord que la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure quant à la convergence de  $\sum u_n$ .

---

## Résolution

### Question 1.

Notons d'abord que nous avons affaire à une série à termes (strictement) positifs.

Malgré la présence des racines carrées, nous sommes dans un « monde » essentiellement multiplicatif.

Pour étudier la limite de la suite  $(u_n)$ , nous pouvons considérer la suite  $(v_n)$  telle que pour tout entier naturel non nul :

$$v_n = \ln u_n = \ln \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})}.$$

On a immédiatement :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \ln \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})} \\
 &= \ln \frac{\prod_{k=1}^n \sqrt{k}}{\prod_{k=1}^n (1+\sqrt{k})} - \ln(1+\sqrt{n+1}) \\
 &= \ln \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} - \ln(1+\sqrt{n+1}) \\
 &= -\ln \prod_{k=1}^n \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{k}} - \ln(1+\sqrt{n+1}) \\
 &= -\ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln(1+\sqrt{n+1}) \\
 &= -\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln(1+\sqrt{n+1})
 \end{aligned}$$

La série  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est une série à termes positifs et on a :  $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Comme la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série divergente, il en va de même pour  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  et on

$$a : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty .$$

Enfin, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n+1}) = +\infty$  et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{n+1}) = +\infty$ .

$$\text{En définitive : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln(1 + \sqrt{n+1}) \right] = -\infty .$$

Il vient donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Pour la suite de l'étude, il semble assez « naturel » d'explorer la règle de D'Alembert.

Pour tout entier naturel  $n$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n+1})(1+\sqrt{n+2})} \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} \times \frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n+1})(1+\sqrt{n+2})} \\ &= \sqrt{n+1} \times \frac{1}{1+\sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

On a alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) = 1$ .

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .

Nous ne pouvons donc pas conclure.

Nous allons chercher maintenant à majorer  $u_n$  par le terme général d'une série convergente.

Comme nous l'avons noté dans le calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , le facteur  $1+\sqrt{n+1}$  joue, en quelque sorte, un rôle particulier. Nous allons donc nous intéresser au produit :

$$(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})$$

On a :

$$\begin{aligned}
 (1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n}) &= 1 + (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}) \\
 &\quad + (\sqrt{1}\sqrt{2} + \sqrt{1}\sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1}\sqrt{n}) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \left( \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 3}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 4}} + \dots + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1) \times n}} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad + \sqrt{n!}
 \end{aligned}$$

La somme  $\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 3}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 4}} + \dots + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1) \times n}}$ , qui comporte  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  termes, est particulièrement intéressante :

$$\begin{aligned}
 (1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n}) &> \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 3}} + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{1 \times 4}} + \dots + \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1) \times n}} \\
 &> \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1) \times n}} = \frac{1}{2} \sqrt{(n-1) \times n} \sqrt{n!}
 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})} \\
 &= \frac{1}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \times \frac{\sqrt{n!}}{1+\sqrt{n+1}} \\
 &< \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{(n-1) \times n} \sqrt{n!}} \times \frac{\sqrt{n!}}{1+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{(n-1) \times n} \times (1+\sqrt{n+1})}
 \end{aligned}$$

On a immédiatement :  $\frac{1}{\sqrt{(n-1) \times n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et  $\frac{1}{1+\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On en déduit :  $\frac{2}{\sqrt{(n-1) \times n} \times (1+\sqrt{n+1})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ .

Or, la série  $\sum \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$  est (à un facteur multiplicatif 2 près) une série de Riemann convergente.

On en déduit finalement :

La série  $\sum u_n$  converge.

## Question 2.

La suggestion de l'énoncé « découle » de la remarque faite précédemment quant au facteur «  $1 + \sqrt{n+1}$  » apparaissant dans l'expression de  $u_n$ .

Avec  $a_n = (1 + \sqrt{n+1})u_n$ , il vient, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (1 + \sqrt{n+2})u_{n+1} - (1 + \sqrt{n+1})u_n \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n+1})} - \frac{\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)!} - (1 + \sqrt{n+1})\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)!} - \sqrt{n!} - \sqrt{(n+1)!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{-\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n+1})} \\ &= -u_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = a_n - a_{n+1}$$

En notant alors classiquement :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

Comme  $a_0 = (1 + \sqrt{0+1})u_0 = (1 + \sqrt{1})\frac{\sqrt{0!}}{1 + \sqrt{1}} = 1$ , on a finalement :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = 1 - a_{n+1}$ .

A la question précédente, nous avons posé :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \frac{\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})(1 + \sqrt{n+1})} \\ &= \ln \frac{\prod_{k=1}^n \sqrt{k}}{\prod_{k=1}^n (1 + \sqrt{k})} - \ln(1 + \sqrt{n+1}) \end{aligned}$$

C'est-à-dire :  $v_n = \ln a_n - \ln(1 + \sqrt{n+1})$ .

Nous avons établi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = +\infty$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln a_n) = +\infty$ .

Nous en avons alors conclu :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = -\infty$  et enfin :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

En passant alors à la limite dans l'égalité  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = 1 - a_{n+1}$ , il vient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1 - 0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})(1+\sqrt{n+1})} = 1$$