

Soit $\sum u_n$ la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

1. Etablir la convergence de $\sum u_n$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (on donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Analyse

La convergence ne pose pas de difficulté particulière car on a un équivalent très simple du terme général. Pour ce qui est du calcul, on mène une décomposition en éléments simple de la fraction rationnelle correspondant à u_n .

Résolution

Question 1.

La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs et on a immédiatement : $u_n \sim \frac{1}{n^4}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^4}$ étant convergente ($4 > 1$), la série $\sum u_n$ est elle-même convergente.

La série $\sum \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ est convergente.

Question 2.

La décomposition en éléments simples de $f(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2}$ est de la forme :

$$\frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2}$$

On a alors : $g(X) = X^2 f(X) = \frac{1}{(X+1)^2} = AX + B + X^2 \left(\frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2} \right)$.

Pour $X = 0$, on obtient : $\frac{1}{(0+1)^2} = A \times 0 + B + 0^2 \left(\frac{C}{0+1} + \frac{D}{(0+1)^2} \right)$, soit $B = 1$.

Puis : $h(X) = (X+1)^2 f(X) = \frac{1}{X^2} = (X+1)^2 \left(\frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} \right) + C(X+1) + D$.

Pour $X = -1$, on obtient : $\frac{1}{(-1)^2} = (-1+1)^2 \left(\frac{A}{-1} + \frac{B}{(-1)^2} \right) + C(-1+1) + D$, soit $D = 1$.

On a ensuite : $Xf(X) = \frac{1}{X(X+1)^2} = A + \frac{B}{X} + \frac{CX}{X+1} + \frac{DX}{(X+1)^2}$.

D'où : $\lim_{X \rightarrow +\infty} Xf(X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X(X+1)^2} = 0 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(A + \frac{B}{X} + \frac{CX}{X+1} + \frac{DX}{(X+1)^2} \right) = A + C$.

Ainsi, $C = -A$ et on a : $f(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-A}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$.

Pour $X = 1$, il vient : $f(1) = \frac{1}{1^2(1+1)^2} = \frac{A}{1} + \frac{1}{1^2} + \frac{-A}{1+1} + \frac{1}{(1+1)^2}$, soit : $\frac{1}{4} = A + 1 + \frac{-A}{2} + \frac{1}{4}$ et,

finalement : $A = -2$.

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$$

Considérons alors, pour tout entier naturel n non nul, la somme partielle : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

D'après la décomposition précédente, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{-2}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= -2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= -2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= -2 \left(1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= -3 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) = -3$ puis, classiquement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -3 + 2 \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 (k+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$