Etudier la nature de la suite $(u_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Indication : on se ramènera à l'étude d'une série.

## Analyse

Dans un premier temps, on « prépare le terrain » en se ramenant à l'étude d'une série. Dans un deuxième temps, on procède à l'étude de cette série.

## Résolution

Comme suggéré dans l'énoncé, on peut se ramener à l'étude d'une série en posant par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n+1} - u_n$$

Dans ces conditions, on a :

$$u_n = v_{n-1} + u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n-2} + u_{n-2} = \ldots = v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_1 + u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + u_1$$

On est ainsi ramené à l'étude de la série $\sum v_n$ .

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \end{aligned}$$

Un premier travail va consister à transformer cette expression de façon à en déterminer le signe.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2} \\
&= \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < 0$.
On a donc affaire à une série dont le terme général est de signe constant.

Il vient alors :

$$v_n = \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2} = \frac{-1}{n^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2 = 4$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}} = 1$$

Soit : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$), il en va donc de même pour la série $\sum \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ et pour la série $\sum v_n$.

Puisque la série $\sum v_n$ converge, il en va de même pour la suite $(u_n)$.

## Résultat final

La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ est convergente.