Etudier la série de terme général :

$$u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

Analyse

On vérifie rapidement que l'on a affaire à une série à termes positifs.
Ensuite, on peut facilement obtenir un équivalent de u_n.

Résolution

Pour tout n entier naturel non nul, la fonction racine n-ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $n+1 > n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow u_n > 0$. Nous avons donc affaire ici à une série à termes (strictement) positifs.

On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} \times e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}} \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} - 1 \right) = e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \right) = e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(\exp\left(\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 \right) \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(\exp\left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \right) = e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right) \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (croissance comparée), on a : $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$ (continuité de la fonction exponentielle en 0) et, finalement :

$$u_n = e^{\frac{\ln n}{n}} \times \left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Et donc : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Le terme général positif de la série $\sum u_n$ étant équivalent à celui d'une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Résultat final

La série de terme général $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ est convergente.