Etudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Analyse

On doit d'emblée remarquer que le terme général de la série est positif. On peut ensuite facilement le comparer au terme général d'une série convergente.

Résolution

Pour $n \geq 2$, on a $\ln n > 0$ et donc $(\ln n)^{\ln n} > 0$ et enfin $u_n > 0$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln(\ln n)\times \ln n} = n^{\ln(\ln n)}$.
Mais on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$. Ainsi, pour n suffisamment grand, on a : $n^{\ln(\ln n)} > n^2$ puis $\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$, soit $u_n < \frac{1}{n^2}$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), on en déduit finalement que la série $\sum u_n$ converge.

Résultat final

La série de terme général $u_n = (\ln n)^{\ln n}$ est convergente.