Etudier la série de terme général :

$$u_n = \cosh^\alpha(n) - \sinh^\alpha(n)$$

où α est un réel.

Analyse

On doit d'emblée remarquer que le terme général de la série garde un signe constant. On peut ensuite obtenir un équivalent simple du terme général.

Résolution

Commençons par noter que pour $\alpha = 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$. La série $\sum u_n$ converge donc.

Dans la suite, on suppose donc : $\alpha \neq 0$.

Pour tout x réel positif, on a classiquement : $\cosh x > \sinh x \geq 0$.
Par ailleurs :

- Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour tout x réel positif : $\cosh^\alpha(x) > \sinh^\alpha(x)$, soit $u_n > 0$.
- Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour tout x réel positif : $\cosh^\alpha(x) < \sinh^\alpha(x)$, soit $u_n < 0$.

Dans tous les cas, le terme général de la série $\sum u_n$ garde donc un signe constant.

Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \cosh^\alpha(n) - \sinh^\alpha(n) \\
&= \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right)^\alpha \\
&= \left[\frac{e^n}{2}\left(1 + e^{-2n}\right)\right]^\alpha - \left[\frac{e^n}{2}\left(1 - e^{-2n}\right)\right]^\alpha \\
&= \left(\frac{e^n}{2}\right)^\alpha \left[\left(1 + e^{-2n}\right)^\alpha - \left(1 - e^{-2n}\right)^\alpha\right]
\end{aligned}$$

Mais au voisinage de l'infini, e^{-2n} est un infiniment petit et il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{e^n}{2}\right)^{\alpha}\left[\left(1+e^{-2n}\right)^{\alpha}-\left(1-e^{-2n}\right)^{\alpha}\right] \\ &= \frac{e^{\alpha n}}{2^{\alpha}}\left[\left(1+\alpha e^{-2n}+\mathrm{o}\left(e^{-2n}\right)\right)-\left(1-\alpha e^{-2n}+\mathrm{o}\left(e^{-2n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{e^{\alpha n}}{2^{\alpha}}\left(2\alpha e^{-2n}+\mathrm{o}\left(e^{-2n}\right)\right) \end{aligned}$$

On en tire immédiatement : $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{e^{\alpha n}}{2^{\alpha}}\times 2\alpha e^{-2n} = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\times\left(e^{\alpha-2}\right)^n$.

Ainsi, le terme général u_n est équivalent à celui d'une suite géométrique de raison $e^{\alpha-2}$. Celle-ci converge si, et seulement si, on a, cette raison étant strictement positive : $e^{\alpha-2}<1$, soit $\alpha-2<0$, c'est-à-dire $\alpha<2$.

En définitive, la série de terme général $u_n=\cosh^{\alpha}(n)-\sinh^{\alpha}(n)$ où α est un réel, est convergente si, et seulement si : $\alpha<2$.

Résultat final

La série de terme général $u_n=\cosh^{\alpha}(n)-\sinh^{\alpha}(n)$ où α est un réel, est convergente si, et seulement si : $\alpha<2$.