

1. Pour tout  $x$  réel non nul, montrer que l'on a :

$$\operatorname{th}(x) = 2 \operatorname{coth}(2x) - \operatorname{coth}(x)$$

2. En déduire que la série de terme général  $u_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$  converge et calculer sa somme.

---

## Analyse

Un peu de géométrie hyperbolique pour pouvoir simplifier (télescopage) les sommes partielles de la série à étudier.

---

## Résolution

### Question 1.

On peut revenir aux définitions du cosinus et du sinus hyperboliques mais on peut également tirer parti des relations classiques :  $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2(x) - 1$  et  $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$ . On a alors, pour tout  $x$  réel non nul :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{coth}(2x) - \operatorname{coth}(x) &= 2 \frac{\operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(2x)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \\ &= \frac{2 \operatorname{ch}^2(x) - 1}{2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \\ &= \frac{2 \operatorname{ch}^2(x) - 1 - \operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} \end{aligned}$$

La relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique,  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ , nous donne  $\operatorname{ch}^2(x) - 1 = \operatorname{sh}^2(x)$  et donc :

$$2 \operatorname{coth}(2x) - \operatorname{coth}(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, 2 \coth(2x) - \coth(x) = \operatorname{th}(x)$$

### Question 2.

Pour tout  $n$  entier naturel, considérons la somme partielle :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Pour  $k > 0$ , on a, en utilisant l'égalité obtenue à la question précédente :

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2 \coth\left(2 \times \frac{x}{2^k}\right) - \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2 \coth\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \coth\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

En tenant compte de  $u_0 = \frac{1}{2^0} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^0}\right) = \operatorname{th}(x)$ , il vient alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \operatorname{th}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left( 2 \coth\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \\ &= \operatorname{th}(x) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2^{k-1}} \coth\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \\ &= \operatorname{th}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \coth\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \operatorname{th}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \operatorname{th}(x) + \frac{1}{2^0} \coth\left(\frac{x}{2^0}\right) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \frac{1}{2^n} \coth\left(\frac{x}{2^n}\right) - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \coth\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \operatorname{th}(x) + \coth(x) - \frac{1}{2^n} \coth\left(\frac{x}{2^n}\right) \end{aligned}$$

D'après la première question, on a immédiatement :  $\operatorname{th}(x) + \coth(x) = 2 \coth(2x)$ .

On s'intéresse maintenant à :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \coth\left(\frac{x}{2^n}\right)$ .

On a d'abord :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ . D'où, immédiatement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = \operatorname{ch}(0) = 1$  et  $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ .

Il en découle :  $\coth\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{x}{2^n}} = \frac{2^n}{x}$  et enfin :  $\frac{1}{2^n} \coth\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \times \frac{2^n}{x} = \frac{1}{x}$ , soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \coth\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{x}$$

On a donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \coth(2x) - \frac{1}{x}$ .

Pour tout réel  $x$  non nul, la série de terme général  $u_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$  est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2 \coth(2x) - \frac{1}{x}$$