

Etudier la série de terme général :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

où $n \geq 2$.

Analyse

Une série alternée pour laquelle le CSSA n'est certainement la panacée...

Résolution

On a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = 1$ et enfin, en tenant compte de

la continuité du logarithme népérien en 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \ln 1 = 0$.

Le terme général de la série $\sum u_n$ tend vers 0.

Par ailleurs, $\sum u_n$ est clairement une série alternée.

Cependant, plutôt que chercher à mettre en œuvre le CSSA (essayez !), on peut facilement donner un DL de u_n au voisinage de l'infini :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1 + \varepsilon(n)}{2n}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, la

suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante.

On peut donc appliquer le CSSA et on en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Par ailleurs, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$, on a $\frac{-1 + \varepsilon(n)}{2n} < 0$ à partir d'un certain rang. En outre $\frac{-1 + \varepsilon(n)}{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$ et la série de terme général $\frac{-1}{2n}$ est divergente (série de Riemann divergente au facteur $\frac{-1}{2}$ près). On en déduit que la série de terme général $\frac{-1 + \varepsilon(n)}{2n}$ est divergente.

Finalement, la série de terme général u_n est une série divergente.

Résultat final

La série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ est divergente.