Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

Discuter, selon α, de la limite de (u_n) et de la nature de la série de terme général u_n.

(Oral Centrale – PSI – 2016)

Analyse

Au regard de la forme de u_n, on ne peut pas ne pas penser aux séries de Riemann…

Résolution

Etude de la suite (u_n)

Notons, dans un premier temps, que chacun des n termes de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ est strictement positif, le plus petit étant $\frac{1}{(n+n)^\alpha} = \frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha \times n^\alpha}$ et le plus grand $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

On a donc immédiatement l'encadrement, pour tout entier naturel n non nul :

$$n \times \frac{1}{2^\alpha \times n^\alpha} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

On a : $n \times \frac{1}{2^\alpha \times n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha \times n^{\alpha-1}}$ et $n \times \frac{1}{(n+1)^\alpha} = n \times \frac{1}{n^\alpha \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

On en déduit :

$$\frac{1}{2^\alpha \times n^{\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

D'où :

- Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^\alpha \times n^{\alpha-1}} = +\infty$ et, par comparaison, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^\alpha \times n^{\alpha-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ et, par encadrement, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Il reste donc à étudier le cas $\alpha = 1$.

On s'intéresse donc à la somme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Nous avons ainsi affaire à une somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$. On en déduit que la suite converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_1^2 \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \left[\ln(t) \right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

En définitive :

La suite (u_n) converge pour $\alpha \geq 1$ avec :

- Si $\alpha > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $\alpha = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$

La suite (u_n) diverge pour $\alpha < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Une condition nécessaire de convergence de la série de terme général u_n est : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On va donc supposer dans ce qui suit : $\alpha > 1$.

On a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}$.

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$. On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \int_1^2 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^2 = \frac{1}{1-\alpha}\left(2^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$.

On en déduit :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Notons au passage que l'obtention de cet équivalent est valable pour $\alpha \neq 1$ et pouvait être utilisé pour l'étude de la suite (u_n)…

On déduit du résultat précédent que la série $\sum u_n$ converge pour $\alpha - 1 > 1$ (série de Riemann convergente), c'est-à-dire $\alpha > 2$.

La série $\sum u_n$ converge pour $\alpha > 2$.

Résultat final

	u_n	$\sum u_n$
$\alpha \in]0\,;1[$	Divergente de limite infinie.	Divergente de limite infinie.
$\alpha = 1$	Convergente de limite égale à $\ln(2)$.	Divergente de limite infinie.
$\alpha \in]1\,;2]$	Convergente de limite nulle.	Divergente de limite infinie.
$\alpha > 2$	Convergente de limite nulle.	Convergente.