Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

(Oral Mines-Ponts – MP – 2014)

Analyse

On a immédiatement $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1$ puis (continuité de la fonction racine carrée en 1) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=1$ et, enfin (continuité de la fonction arccos en 1) : $\lim_{n\to+\infty}\arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=0$.
La série $\sum u_n$ converge peut-être...

On peut procéder de bien des façons… On peut s'intéresser au comportement de $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ au voisinage de l'infini mais on peut aussi porter l'attention sur cette même racine carrée comme argument d'une fonction trigonométrique circulaire…

Résolution

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $1-\frac{1}{n^2}<1$ et donc $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}<1$. On en déduit immédiatement $u_n>0$: la série $\sum u_n$ est donc une série à termes (strictement) positifs.

Posons alors $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$ et donnons un DL de *f* en 0 à droite.
On peut écrire : $f(x)=\arccos g(x)$ avec $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ qui donne, pour $x\in\left]0;1\right[$:

$$g'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Il vient alors, toujours sur $\left]0;1\right[$:

$$f'(x)=-\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}=-\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\times x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'où : $f'(x) \underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$.

De $f(0)=0$, on tire, en intégrant le DL précédent : $f(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$.

Comme $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient : $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, d'où : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Enfin, comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente, il en va de même pour $\sum u_n$.

Comme $1 > \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \geq 0$, il vient $u_n \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et donc :

$$\sin u_n = \sqrt{1-\cos^2\left(u_n\right)} = \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\frac{1}{n} = \sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

On a retrouvé, sans avoir recours aux DL, l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et on conclut bien sûr à l'identique.

Résultat final

La série $\sum \arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ est divergente.