Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$$

Analyse

On rappelle le résultat très classique : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. La série $\sum u_n$ converge peut-être…

On peut alors s'intéresser au signe de u_n …

Résolution

En étudiant par exemple la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [1\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \end{cases}$$

on montre facilement que l'on a : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < 0$.

On a donc affaire à une série dont le terme général garde un signe constant.

On a facilement le développement limité de $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ à l'ordre 2 au voisinage de l'infini :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où : $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e = e^{1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - e \\
&= e\left(e^{-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = e\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \\
&= -\frac{e}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Finalement : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e}{2n}$. Or $-\frac{e}{2n}$ est le terme général d'une série divergente (série de Riemann divergente). On en déduit que $\sum u_n$ diverge également.

Résultat final

La série $\sum\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$ est divergente.