Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n \sqrt{n}}$$

## Analyse

On montre facilement que $u_n$ est défini pour $n \geq 2$. Ensuite, comme $n \geq 2 \Rightarrow n^{\frac{2}{3}} > \sqrt{n}$, on établit que la série $\sum u_n$ est alternée.

## Résolution

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{1+(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{2}{3}}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{1+(-1)^n \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}}} \\
&= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \left(1-\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \left(1-\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}} + \frac{\varepsilon(n)}{n^{\frac{1}{6}}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} \times \left(1+\frac{(-1)^{n+1}+\varepsilon(n)}{n^{\frac{1}{6}}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{(-1)^n \varepsilon(n) - 1}{n^{\frac{5}{6}}}
\end{aligned}$$

avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ est une série alternée.

Or, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} = 0$ et $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}\right|\right) = \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est décroissante. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ est donc convergente.

Intéressons-nous maintenant à la série de terme général $\frac{(-1)^n \varepsilon(n)-1}{n^{\frac{5}{6}}}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$, il existe un rang $N$ à partir duquel on a $(-1)^n \varepsilon(n) \in \left]-1\,;+1\right[$. A partir de ce rang, on aura $(-1)^n \varepsilon(n)-1 \in \left]-2\,;0\right[$ et donc $\frac{(-1)^n \varepsilon(n)-1}{n^{\frac{5}{6}}} < 0$. Ainsi, la série de terme général $\frac{(-1)^n \varepsilon(n)-1}{n^{\frac{5}{6}}}$ est une série à termes de signe constant à partir d'un certain rang.

Or, il vient facilement : $\frac{(-1)^n \varepsilon(n)-1}{n^{\frac{5}{6}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^{\frac{5}{6}}}$. La série de terme général $\frac{-1}{n^{\frac{5}{6}}}$ est une série de Riemann divergente (car $\frac{5}{6} \leq 1$). On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^n \varepsilon(n)-1}{n^{\frac{5}{6}}}$ est également divergente.

En définitive, $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle est donc divergente.

## Résultat final

La série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n \sqrt{n}}\right)$ est divergente.