Soit a un réel strictement positif.

Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a}\right)$$

Analyse

La présence du facteur π dans le sinus nous conduit, dans un premier temps, à factoriser la racine carrée pour ensuite effectuer un développement limité de u_n…

Résolution

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a}\right) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{a}{n^2}}\right) = \sin\left(n\pi\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Pour fixer les idées, nous commençons par un développement limité d'ordre réduit :

$$\begin{aligned}u_n &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sin\left(n\pi\left(1+\frac{a}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \sin\left(n\pi+\frac{a\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{a\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\frac{a\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

La série $\sum(-1)^n\frac{a\pi}{2n}$ est une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées. Elle converge donc. Malheureusement, nous n'avons aucune précision quant au « $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ».

Il nous faut donc « pousser » notre développement limité.

$$
\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sin\left(n\pi\left(1+\frac{a}{2n^2}-\frac{a^2}{8n^4}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \sin\left(n\pi+\frac{a\pi}{2n}-\frac{a^2\pi}{8n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{a\pi}{2n}-\frac{a^2\pi}{8n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= (-1)^n\left(\frac{a\pi}{2n}-\frac{a^2\pi}{8n^3}-\frac{a^3\pi^3}{48n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\frac{a\pi}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{a^2\pi\left(6+a\pi^2\right)}{48n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= (-1)^n\frac{a\pi}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{a^2\pi\left(6+a\pi^2\right)}{48n^3}+\frac{\varepsilon(n)}{n^3}
\end{aligned}
$$

avec : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0$.

Comme nous l'avons vu précédemment, la série $\sum(-1)^n\frac{a\pi}{2n}$ est convergente.

Par ailleurs, la série $\sum(-1)^{n+1}\frac{a^2\pi\left(6+a\pi^2\right)}{48n^3}$ est alternée. Or, elle vérifie également le critère spécial des séries alternées. Elle est donc convergente. Notons, en passant, que nous pouvions simplement conclure à la convergence absolue de cette série.

Enfin, comme $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0$, on a, à partir d'un certain rang : $\left|\frac{\varepsilon(n)}{n^3}\right|\leq\frac{1}{n^3}$. Comme la série $\sum\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, on en conclut finalement que la série $\sum\frac{\varepsilon(n)}{n^3}$ est absolument convergente et donc convergente.

D'après ce qui précède, on peut finalement conclure que la série $\sum u_n$ est convergente.

Résultat final

La série $\sum\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a}\right)$ est convergente.