

Soit p un entier relatif.

Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$$

Analyse

Nous notons dans un premier temps que la série est à termes (strictement) positifs. Comme souvent avec un terme général dépendant d'un paramètre, on doit d'abord se demander pour quelle valeur du paramètre on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Résolution

$n!$ est le plus grand terme du numérateur. Ainsi, si $n+p \leq n$, c'est-à-dire $p \leq 0$, on aura $(n+p)! \leq n!$ et donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)! + n!}{(n+p)!} = \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{(n+p)!} + \underbrace{\frac{n!}{(n+p)!}}_{\geq 1} \geq 1$$

Dans ce cas, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Supposons désormais $p > 0$.

Posons, pour alléger les écritures : $\sigma_n = 1! + 2! + \dots + n!$

$$\text{On a : } u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!} = \frac{\sigma_n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n}{n!} &= \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} = \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)! + n!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!} \leq 1 + \frac{(n-1) \times (n-1)!}{n!} = 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } u_n = \frac{\sigma_n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Comme $u_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} = 0$, on en déduit finalement par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

L'encadrement : $0 < u_n \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$ va nous être utile pour la suite.

En effet, si $p \geq 2$, on a : $0 < u_n \leq \frac{2}{\underbrace{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}_{p \text{ facteurs}}} \leq \frac{2}{n^p}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^p}$ est

convergente (série de Riemann convergente). On en déduit immédiatement que $\sum u_n$ converge.

Traitons enfin le cas $p = 1$.

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{\sigma_{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{(n+2)}}{\frac{\sigma_n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n+2} \times \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{1}{n+2} \times \frac{\sigma_n + (n+1)!}{\sigma_n} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \left(1 + \frac{(n+1)!}{\sigma_n}\right) = \frac{1}{n+2} \times \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

On en tire finalement : $u_{n+1} = \frac{1}{n+2} \times (1 + u_n)$ puis : $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+2}$, soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Résultat final

La série de terme général $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$ où $p \in \mathbb{Z}$
est divergente pour $p \leq 1$ (grossièrement pour $p \leq 0$)
et convergente pour $p \geq 2$.