Après avoir établi la convergence de la série $\sum \frac{1}{(4n)^3-4n}$, montrer que :

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n)^3-4n} = \frac{3}{2}\ln(2)$$

(RAMANUJAN)

Analyse

Il n'y a pas de difficulté particulière à établir que la série est définie pour $n \geq 1$ et est à termes positifs. A partir de là, on a facilement un équivalent simple de $\frac{1}{(4n)^3-4n}$ et la convergence en découle… Pour ce qui est de l'égalité proposée, il convient bien sûr de calculer la valeur de la somme de la série (pour une fois, le calcul est accessible !). Dans la mesure où le dénominateur de $\frac{1}{(4n)^3-4n}$ se factorise aisément, il semble « naturel » d'envisager une décomposition en éléments simples…

Résolution

Convergence de la série

Comme $x^3-x = x(x^2-1)$, la fonction carrée nous permet d'affirmer que l'on a $x^3-x>0$ pour tout réel x strictement supérieur à 1. On en tire que le rapport $\frac{1}{(4n)^3-4n}$ est défini pour tout entier naturel n non nul et que la série $\sum \frac{1}{(4n)^3-4n}$ est une série à termes (strictement) positifs.

Ensuite, on a immédiatement l'équivalent : $\frac{1}{(4n)^3-4n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(4n)^3} = \frac{1}{64n^3}$. On en tire que l'on a affaire à une série équivalente à une série de Riemann convergente ($3>1$). La série converge donc.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{(4n)^3-4n} \text{ est convergente.}}$$

Calcul de la somme

On a facilement $x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x-1)(x+1)$, d'où : $\dfrac{1}{(4n)^3-4n}=\dfrac{1}{4n(4n-1)(4n+1)}$.

On pose $F(x)=\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$.

On a affaire à une fonction rationnelle dont on connaît les trois pôles : 0, -1 et 1.
On peut donc, via une décomposition en éléments simples, l'écrire sous la forme :

$$F(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

On a $G(x)=xF(x)=A+\dfrac{Bx}{x-1}+\dfrac{Cx}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}$.

D'où : $G(0)=A=-1$ et donc : $F(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$.

Ensuite : $H(x)=(x-1)F(x)=\dfrac{-(x-1)}{x}+B+\dfrac{C(x-1)}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

D'où : $H(1)=B=\dfrac{1}{2}$ et donc : $F(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{C}{x+1}$

Enfin : $I(x)=(x+1)F(x)=\dfrac{-(x+1)}{x}+\dfrac{B(x+1)}{x-1}+C=\dfrac{1}{x(x-1)}$.

D'où : $I(-1)=C=\dfrac{1}{2}$ et donc : $F(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}$.

$$F(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$$

On s'intéresse donc à : $\displaystyle\sum\frac{1}{(4n)^3-4n}=\sum\left(\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2(4n-1)}+\frac{1}{2(4n+1)}\right)$.

Soit N un entier naturel non nul.

On veut calculer : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2(4n-1)}+\frac{1}{2(4n+1)}\right)$.

On a :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2(4n-1)}+\frac{1}{2(4n+1)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-2}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)$$

Concentrons-nous donc sur : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-2}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)$.

Il est intéressant, dans ce genre de calcul, de faire apparaître des sommes d'inverses d'entiers naturels <u>consécutifs</u>. Dans la somme considérée, il y a des trous et nous allons nous débrouiller pour que les inverses « de référence » soient les inverses des multiples de 4 :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-2}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{-3}{4n}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)\\
&= \frac{-3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{4n+3}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+1}\\
&= \frac{-3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n}+\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4N+3}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+1}\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{4N+3}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+3}\right)\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{4N+3}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\
&\qquad +\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+3}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+2}\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{4N+3}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=4}^{4N+3}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+2}\\
&= -\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=3}^{4N+2}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n+2}\\
&= -1-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}-1-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\right)\\
&= -1-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\
&= -1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

On utilise alors :

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln(N)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)\\
\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}=\ln(4N+2)+\gamma+o\left(\frac{1}{4N+2}\right)=\ln(4N+2)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)\\
\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}=\ln(2N+1)+\gamma+o\left(\frac{1}{2N+1}\right)=\ln(2N+1)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)
\end{gathered}
$$

où γ est la constante d'Euler.

On en tire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-2}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right) &= -1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{4N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n} \\
&= -1-\frac{1}{2}\left(\ln(N)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)+\left(\ln(4N+2)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\ln(2N+1)+\gamma+o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&= -1-\frac{1}{2}\ln(N)+\ln(4N+2)-\frac{1}{2}\ln(2N+1)+o\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= -1+\ln(2)+\ln\left(\frac{2N+1}{\sqrt{N(2N+1)}}\right)+o\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= -1+\ln(2)+\ln\left(\frac{2N+1}{\sqrt{2}N\sqrt{1+\frac{1}{2N}}}\right)+o\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= -1+\ln(2)+\ln\left(\frac{2+\frac{1}{N}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2N}}}\right)+o\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2(4n-1)}+\frac{1}{2(4n+1)}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-2}{4n}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-1+\ln(2)+\ln\left(\frac{2+\frac{1}{N}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2N}}}\right)+o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\frac{1}{N}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2N}}}\right)+o\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

On a facilement : $\lim\limits_{N\to+\infty}\ln\left(\frac{2+\frac{1}{N}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2N}}}\right)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(2)$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n)^3-4n} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2(4n-1)}+\frac{1}{2(4n+1)}\right)\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln(2)\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\ln(2)\end{aligned}$$

Et, finalement : $1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n)^3-4n}=\frac{3}{2}\ln(2)$

Résultat final

La série de terme général $\frac{1}{(4n)^3-4n}$ est convergente et on a :

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n)^3-4n}=\frac{3}{2}\ln(2)$$