Simplifier :

$$\arg\operatorname{th}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)$$

Analyse

Une transformation simple de l'écriture de $\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}$ permet d'identifier la tangente hyperbolique d'une somme. On peut également procéder directement en utilisant l'expression de $\arg\operatorname{th}x$. Nous proposons les deux approches ci-dessous.

Résolution

1ère approche

On a :

$$\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}=\frac{\frac{1}{3}+\operatorname{th}x}{1+\frac{1}{3}\operatorname{th}x}$$

Comme la fonction tangente hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1;+1[$ et que $\frac{1}{3}$ appartient à cet intervalle, on peut affirmer qu'il existe un unique réel a tel que $\frac{1}{3}=\operatorname{th}a$. En d'autre terme, $a=\arg\operatorname{th}\frac{1}{3}$.

Dans ces conditions, il vient :

$$\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}=\frac{\frac{1}{3}+\operatorname{th}x}{1+\frac{1}{3}\operatorname{th}x}=\frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}a\times\operatorname{th}x}=\operatorname{th}(x+a)$$

On en déduit finalement : $\arg\operatorname{th}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)=x+a$.

Comme on a : $\arg\text{th}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, il vient :

$$a = \arg\text{th}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

En définitive :

$$\boxed{\arg\text{th}\left(\frac{1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x}\right) = x + \frac{1}{2}\ln 2}$$

2^ème^ approche

A partir de $\arg\text{th}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\arg\text{th}\left(\frac{1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x}}{1-\frac{1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\text{th}\, x+1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x-(1+3\,\text{th}\, x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+4\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x-1-3\,\text{th}\, x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+4\,\text{th}\, x}{2-2\,\text{th}\, x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2\frac{1+\text{th}\, x}{1-\text{th}\, x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\text{th}\, x}{1-\text{th}\, x}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \arg\text{th}(\text{th}\, x)\\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + x
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\arg\text{th}\left(\frac{1+3\,\text{th}\, x}{3+\text{th}\, x}\right) = x + \frac{1}{2}\ln 2$$

Complément

Pour tout réel α de $]-\infty;-1[\cup]+1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{arg\,th}\left(\frac{1+\alpha\operatorname{th}x}{\alpha+\operatorname{th}x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{1+\alpha\operatorname{th}x}{\alpha+\operatorname{th}x}}{1-\dfrac{1+\alpha\operatorname{th}x}{\alpha+\operatorname{th}x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+\operatorname{th}x+\alpha+3\operatorname{th}x}{\alpha+\operatorname{th}x-(1+\alpha\operatorname{th}x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\alpha+1)+(\alpha+1)\operatorname{th}x}{(\alpha-1)-(\alpha-1)\operatorname{th}x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\times\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}\right)\\
&= \operatorname{arg\,th}\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\operatorname{arg\,th}(\operatorname{th}x)\\
&= \operatorname{arg\,th}\left(\frac{1}{\alpha}\right)+x
\end{aligned}$$