

Soit a un réel.

Résoudre :

$$\sinh a + \sinh(a+x) + \sinh(a+2x) + \sinh(a+3x) = 0$$

Analyse

Dans cet exercice, il convient de regrouper les termes et d'utiliser la formule permettant de factoriser la somme de deux sinus hyperboliques.

Résolution

Rappelons que l'on a, pour tous x et y réels :

$$\sinh x + \sinh y = 2 \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \sinh a + \sinh(a+x) + \sinh(a+2x) + \sinh(a+3x) = 0 \\ \Leftrightarrow & [\sinh a + \sinh(a+3x)] + [\sinh(a+x) + \sinh(a+2x)] = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \cosh\left(\frac{a+3x-a}{2}\right) \sinh\left(\frac{a+3x+a}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{a+2x-(a+x)}{2}\right) \sinh\left(\frac{a+2x+a+x}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \cosh\left(\frac{3x}{2}\right) \sinh\left(\frac{2a+3x}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \sinh\left(\frac{2a+3x}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sinh\left(\frac{2a+3x}{2}\right) \times \left[\cosh\left(\frac{3x}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a : $\cosh\left(\frac{3x}{2}\right) \geq 1$ et $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1$.

On en déduit : $\cosh\left(\frac{3x}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2$ et, enfin, en tenant compte de $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

$$\sinh a + \sinh(a+x) + \sinh(a+2x) + \sinh(a+3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sinh\left(\frac{2a+3x}{2}\right) \times \left[\cosh\left(\frac{3x}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{2a+3x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a+3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}a$$

Résultat final

L'équation $\sinh a + \sinh(a+x) + \sinh(a+2x) + \sinh(a+3x) = 0$

admet pour unique solution : $x = -\frac{2}{3}a$.