Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx)$$

Analyse

Un calcul classique dans lequel la définition du cosinus hyperbolique permet de se ramener à des sommes de termes consécutifs de suites géométriques.

Résolution

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) &= \cosh 0 + \cosh(x) + \cosh(2x) + \cosh(3x) + \ldots + \cosh(nx) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(e^{nx} + e^{-nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots + e^{-nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right) + \frac{1}{2}e^{-nx}\left(1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right)\left(1 + e^{-nx}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la somme $1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}$ la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{x}. On doit donc distinguer deux cas.

Si $e^{x} = 1$, c'est-à-dire si $x = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) = \cosh 0 + \cosh 0 + \cosh 0 + \cosh 0 + \ldots + \cosh 0 = n+1$$

Si $e^x \neq 1$, c'est-à-dire si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) &= \cosh 0 + \cosh(x) + \cosh(2x) + \cosh(3x) + \ldots + \cosh(nx) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right)\left(1 + e^{-nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} e^{-\frac{n}{2}x}\left(e^{\frac{n}{2}x} + e^{-\frac{n}{2}x}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-\frac{n+1}{2}x} - e^{\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{\frac{1}{2}x}\left(e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x}\right)} e^{-\frac{n}{2}x} \cosh\left(\frac{n}{2}x\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{n+1}{2}x} - e^{-\frac{n+1}{2}x}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)} \cosh\left(\frac{n}{2}x\right) \\
&= \frac{\sinh\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)} \cosh\left(\frac{n}{2}x\right)
\end{aligned}$$

On peut aussi tenir compte de :

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cosh\left(\frac{n}{2}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sinh\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n}{2}x\right) + \sinh\left(\frac{n+1}{2}x - \frac{n}{2}x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sinh\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}x\right)\right]
\end{aligned}$$

Le résultat se récrit alors :

$$\frac{\sinh\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)}\cosh\left(\frac{n}{2}x\right) = \frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)} + 1\right)$$

On aurait également pu écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) = \cosh 0 + \cosh(x) + \cosh(2x) + \cosh(3x) + \ldots + \cosh(nx)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-nx} + e^{-(n-1)x} + \ldots + e^{-x} + 1 + e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{-nx} - e^{(n+1)x}}{1 - e^{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2e^{\frac{1}{2}x}\left(\dfrac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2}\right)}{2e^{\frac{1}{2}x}\left(\dfrac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x}}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

Si $x = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) = n + 1$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) = \frac{\sinh\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)} \cosh\left(\frac{n}{2}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)} + 1\right)$$