

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$\varphi_n(x) = \cosh \left[n \operatorname{arg} \cosh(x) \right]$$
$$\Phi_n(x) = \frac{\sinh \left[n \operatorname{arg} \cosh(x) \right]}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Démontrer que ces fonctions sont polynomiales.

Analyse

Un calcul classique dans lequel la définition du cosinus hyperbolique permet de se ramener à des sommes de termes consécutifs de suites géométriques.

Résolution

La démonstration se fait par récurrence. Nous allons mener les deux récurrences simultanément mais dans un premier temps, nous validons le résultat pour quelques valeurs de l'entier n .

$\varphi_0(x) = \cosh 0 = 1$, fonction polynôme constante.

$\varphi_1(x) = \cosh(1 \times \operatorname{arg} \cosh(x)) = x$, fonction polynôme identité.

$\varphi_2(x) = \cosh(2 \times \operatorname{arg} \cosh(x)) = 2 \cosh^2(\operatorname{arg} \cosh(x)) - 1 = 2x^2 - 1$, fonction polynôme de degré 2.

$\Phi_0(x) = \frac{\sinh 0}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$, fonction polynôme constante.

$\Phi_1(x) = \frac{\sinh(1 \times \operatorname{arg} \cosh(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sinh(\operatorname{arg} \cosh(x))}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Comme $\operatorname{arg} \cosh(x) \geq 0$, on a $\sinh(\operatorname{arg} \cosh(x))$ et donc :

$$\sinh(\operatorname{arg} \cosh(x)) = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{arg} \cosh(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

D'où : $\Phi_1(x) = \frac{\sinh(\operatorname{arg} \cosh(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$, fonction polynôme constante.

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= \frac{\sinh(2 \times \arg \cosh(x))}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2 \times \sinh(\arg \cosh(x)) \times \cosh(\arg \cosh(x))}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2 \times \sqrt{x^2-1} \times x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= 2x\end{aligned}$$

On obtient encore une fonction polynôme (fonction linéaire).

Soit maintenant n un entier naturel quelconque fixé.

Nous supposons que les fonctions φ_n et Φ_n sont des fonctions polynômes.

Intéressons-nous aux fonctions φ_{n+1} et Φ_{n+1} .

Pour tout x réel supérieur strictement à 1, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x) &= \cosh((n+1) \arg \cosh(x)) \\ &= \cosh(n \arg \cosh(x)) \times \cosh(\arg \cosh(x)) + \sinh(n \arg \cosh(x)) \times \sinh(\arg \cosh(x)) \\ &= \varphi_n(x) \times x + \sqrt{x^2-1} \times \Phi_n(x) \times \sqrt{x^2-1} \\ &= x \varphi_n(x) + (x^2-1) \Phi_n(x)\end{aligned}$$

On note également que cette égalité reste valable pour $x=1$ puisque :

- $\varphi_n(1) = \varphi_{n+1}(1) = \cosh(0) = 1$.
- La fonction Φ_n est prolongeable par continuité en 1 en tant que fonction polynôme. Il en découle : $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(x^2-1) \Phi_n(x)] = 0$.

Comme les fonctions φ_n et Φ_n sont des fonctions polynômes, l'égalité

$\varphi_{n+1}(x) = x \varphi_n(x) + (x^2-1) \Phi_n(x)$ nous permet de conclure qu'il en va de même pour la fonction φ_{n+1} .

Pour tout x réel supérieur strictement à 1, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(x) &= \frac{\sinh((n+1) \arg \cosh(x))}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sinh(n \arg \cosh(x)) \times \cosh(\arg \cosh(x)) + \cosh(n \arg \cosh(x)) \times \sinh(\arg \cosh(x))}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1} \times \Phi_n(x) \times x + \varphi_n(x) \times \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= x \Phi_n(x) + \varphi_n(x)\end{aligned}$$

Comme les fonctions φ_n et Φ_n sont des fonctions polynômes, l'égalité

$\Phi_{n+1}(x) = x \Phi_n(x) + \varphi_n(x)$ nous permet de conclure qu'il en va de même pour la fonction Φ_{n+1} .

Résultat final

Pour tout entier naturel n , les fonctions :

$$\varphi_n : \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \cosh(n \operatorname{argcosh}(x)) \end{cases} \text{ et } \Phi_n : \begin{cases}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \frac{\sinh(n \operatorname{argcosh}(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$$

sont polynomiales.

Compléments

Nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives dans un repère orthogonal des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Phi_1, \Phi_2$ et Φ_3 .

