Résoudre :

$$\arg\cosh(x) = \arg\sinh\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Analyse

On doit bien sûr tenir compte des domaines de définition des fonctions argcosh et argsinh. L'équation se résout alors en utilisant les expressions des arguments des fonctions cosinus et sinus hyperboliques à l'aide du logarithme népérien.

Résolution

La fonction argcosh est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et la fonction argsinh sur $\mathbb{R}$.
On cherche donc les solutions dans $[1\,;+\infty[$.

En exprimant alors les arguments à l'aide de la fonction logarithme népérien, on a :

$$\arg\cosh(x) = \arg\sinh\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

Résolvons $x + \sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$.

On a :

$$\sqrt{x^2-1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - \frac{5}{4} = -\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \cancel{x^2} - x + \frac{1}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5}{2} = -\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} \leq 0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} \leq 0 \\ \cancel{x^2} - 5x + \frac{25}{4} = \cancel{x^2} - x + \frac{1}{4} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 5 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

On vérifie que pour $x = \frac{5}{4}$ on a bien $\sqrt{x^2-1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$.

Comme, de surcroît, on a : $\frac{5}{4} \geq 1$, il vient : $\arg\cosh(x) = \arg\sinh\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Résultat final

L'équation $\arg\cosh(x) = \arg\sinh\left(x - \frac{1}{2}\right)$ admet pour unique solution $x = \frac{5}{4}$.