Etude de l'existence de solution pour le système :

$$\begin{cases}\cosh x+\cosh y=a\\ \sinh x+\sinh y=b\end{cases}$$

Analyse

Avant toute démarche visant à « résoudre » le système, on souligne d'éventuelles contraintes sur les paramètres *a* et *b* découlant des définitions des fonctions hyperboliques réciproques (la fonction argcosh n'est pas définie pour tous les réels …).
Ensuite, on peut assez « naturellement » effectuer un changement de variable découlant des définitions du cosinus et du sinus hyperboliques.

Résolution

Notons, dans un premier temps, que la fonction cosinus hyperbolique prend ses valeurs dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On a donc : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \cosh x+\cosh y\geq 2$. Ainsi, si $a<2$, le système n'admet pas de solutions.

On suppose donc pour la suite que l'on a : $a\geq 2$.

Posons $X=e^x>0$ et $Y=e^y>0$.
On a :

$$\begin{cases}\cosh x+\cosh y=a\\ \sinh x+\sinh y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{X+\dfrac{1}{X}}{2}+\dfrac{Y+\dfrac{1}{Y}}{2}=a\\ \dfrac{X-\dfrac{1}{X}}{2}+\dfrac{Y-\dfrac{1}{Y}}{2}=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X+Y+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}=2a\\ X+Y-\left(\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}\right)=2b\end{cases}$$

Comme *X* et *Y* sont strictement positifs, on a aussi $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}>0$ et on peut immédiatement distinguer deux cas :

→ Si $a\leq b$ alors le système n'admet pas de solution ($X+Y+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}>X+Y-\left(\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}\right)$ est incompatible avec $a\leq b$).

→ Si $a > b$, on a :

$$\begin{cases} X+Y+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}=2a \\ X+Y-\left(\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}\right)=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=a+b \\ \dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}=a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=a+b \\ \dfrac{X+Y}{XY}=a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=a+b \\ XY=\dfrac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Ainsi, X et Y sont les éventuelles solutions réelles strictement positives de l'équation du second degré :

$$\theta^2-(a+b)\theta+\frac{a+b}{a-b}=0 \qquad (\mathrm{E})$$

Le discriminant Δ associé à cette équation s'écrit :

$$\Delta=(a+b)^2-4\frac{a+b}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}\left[(a+b)(a-b)-4\right]=\frac{a+b}{a-b}\left(a^2-b^2-4\right)$$

L'équation (E) admet au moins une racine réelle si, et seulement si, $\Delta \geq 0$, soit, en tenant compte de $a > b$: $(a+b)\left(a^2-b^2-4\right) \geq 0$.

Par ailleurs, on veut que les racines éventuelles soient strictement positives. Leur produit et leur somme doivent donc l'être : $a+b>0$ et $\dfrac{a+b}{a-b}>0$. Ce qui équivaut, toujours en tenant compte de $a > b$, à : $a+b>0$.

En définitive, l'équation (E) admet une ou deux racines réelles strictement positives si, et seulement si :

$$\begin{cases} (a+b)\left(a^2-b^2-4\right) \geq 0 \\ a+b>0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} a^2-b^2-4 \geq 0 \\ a+b>0 \end{cases}$$

Intéressons-nous à l'inégalité : $a^2-b^2-4 \geq 0$.
On a : $a^2-b^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2-\left(b^2+4\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(a-\sqrt{b^2+4}\right)\left(a+\sqrt{b^2+4}\right) \geq 0$.

Cette dernière inégalité équivaut à $a \leq -\sqrt{b^2+4}$ ou $a \geq \sqrt{b^2+4}$.
Comme on a $a \geq 2$ et $-\sqrt{b^2+4}<0$, on rejette $a \leq -\sqrt{b^2+4}$.
Il reste donc $a \geq \sqrt{b^2+4}$.
Remarquons alors que $b^2+4 \geq 4$ équivaut à $\sqrt{b^2+4} \geq 2$. Ainsi, si l'inégalité $a \geq \sqrt{b^2+4}$ est vérifiée alors on a bien $a \geq 2$.

Par ailleurs, si *b* est positif, on a $a+b \geq \sqrt{b^2+4}+b \geq 2>0$.

Si *b* est strictement négatif, on a : $a+b \geq \sqrt{b^2+4}-|b|=\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}+|b|}>0$.

Quelle que soit la valeur de *b*, l'inégalité $a \geq \sqrt{b^2+4}$ entraîne $a+b>0$.

En définitive, l'équation (E) admet une ou deux racines réelles strictement positives si, et seulement si : $a \geq \sqrt{b^2+4}$.

C'est également la condition, nécessaire et suffisante, garantissant l'existence de solutions pour le système initial.

Résultat final

Le système

$$\begin{cases} \cosh x+\cosh y=a \\ \sinh x+\sinh y=b \end{cases}$$

admet des solutions si, et seulement si, on a :

$$a \geq \sqrt{b^2+4}$$