Soit y un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose : $x=\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Etablir les égalités :

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(\frac{y}{2}\right) \qquad \sinh(x)=\tan(y) \qquad \cosh(x)=\frac{1}{\cos(y)}$$

Analyse

Un exercice d'application du cours où on doit éviter de se perdre dans des calculs trop fastidieux mais qui permet de revoir, en particulier, quelques formules de trigonométrie circulaire.

Résolution

Notons d'abord que l'on a : $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\frac{y}{2}<\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0<\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$,

Ainsi, le réel x est bien défini.

Pour tout réel t, on a : $\tanh(t)=\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}=\frac{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

D'où : $\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Comme $x=\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, il vient immédiatement :

$$e^x=\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}$$

Alors :

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{\dfrac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}-1}{\dfrac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}+1}=\frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)-1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{2}$$
$$=\tan\left(\frac{y}{2}\right)$$

Le résultat est ainsi établi.

On a ensuite :

$$\sinh(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}-\frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\left[1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2-\left[1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2}{1-\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left[1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]\times\left[1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)-1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]}{1-\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2\times2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)}$$
$$=\frac{2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{\dfrac{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}}=\frac{2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{\dfrac{\cos\left(2\times\frac{y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}}=2\times\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}\times\frac{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos(y)}$$
$$=\frac{2\times\sin\left(\frac{y}{2}\right)\times\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos(y)}=\frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$
$$=\tan(y)$$

Le résultat est ainsi établi.

Enfin :

$$\cosh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}+\frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\left[1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]^{2}+\left[1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right]^{2}}{1-\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+2\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)+1-2\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2\left[1+\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]}{1-\tan^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}}{\frac{\cos^{2}\left(\frac{y}{2}\right)-\sin^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}}=\frac{1}{\cos^{2}\left(\frac{y}{2}\right)-\sin^{2}\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{1}{\cos\left(2\times\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos(y)}$$

A partir des deux derniers résultats, il vient :

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{\tan(y)}{\frac{1}{\cos(y)}}=\frac{\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{\frac{1}{\cos(y)}}=\sin(y)$$

Résultat final

Pour tout y dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, en posant $x=\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, il vient :

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(\frac{y}{2}\right),\ \sinh(x)=\tan(y)\ \text{ et }\ \cosh(x)=\frac{1}{\cos(y)}$$