Soit a et b deux réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$.

1. A quelle(s) condition(s) sur a et b peut-on trouver deux réels A et φ tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, a\cosh(x)+b\sinh(x)=A\cosh(x+\varphi)$?
2. A quelle(s) condition(s) sur a et b peut-on trouver deux réels A et φ tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, a\cosh(x)+b\sinh(x)=A\sinh(x+\varphi)$?

Analyse

On reprend les définitions des fonctions cosinus et sinus hyperboliques et on procède classiquement par identification.

Résolution

Question 1.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R}, a\cosh(x)+b\sinh(x)=A\cosh(x+\varphi)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R}, a\times\frac{e^x+e^{-x}}{2}+b\times\frac{e^x-e^{-x}}{2}=A\times\frac{e^{x+\varphi}+e^{-x-\varphi}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R}, \left(a+b-Ae^{\varphi}\right)e^x+\left(a-b-Ae^{-\varphi}\right)e^{-x}=0\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R}, \left(a+b-Ae^{\varphi}\right)e^{2x}+\left(a-b-Ae^{-\varphi}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a+b-Ae^{\varphi}=0\\ a-b-Ae^{-\varphi}=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} Ae^{\varphi}=a+b\\ Ae^{-\varphi}=a-b\end{cases}
\end{aligned}$$

Si $a=b$, alors la deuxième équation donne $A=0$ et (par exemple) la première entraîne alors $a=b=0$ ce qui est contraire à l'hypothèse $(a,b)\neq(0,0)$.

On suppose désormais $a\neq b$.

Dans ce cas, en divisant les deux équations membre à membre, il vient :

$$\frac{Ae^{\varphi}}{Ae^{-\varphi}} = e^{2\varphi} = \frac{a+b}{a-b}$$

On a alors :

$$\varphi \text{ existe} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} > 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow |a| > |b|$$

Sous cette hypothèse, qui implique $a \neq 0$, il vient alors :

$$e^{2\varphi} = \frac{a+b}{a-b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \varphi = \arg\tanh\frac{b}{a}$$

D'où, grâce à la deuxième équation du système :

$$A = (a-b)e^{\varphi} = (a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \operatorname{sgn}(a-b)\times|a-b|\times\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \operatorname{sgn}(a-b)\times\sqrt{a^2-b^2}$$

A et φ existent si, et seulement si : $|a| > |b|$ et on a alors :

$\varphi = \arg\tanh\frac{b}{a}$ et $A = \operatorname{sgn}(a-b)\times\sqrt{a^2-b^2}$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cosh(x) + b\sinh(x) = \operatorname{sgn}(a-b)\times\sqrt{a^2-b^2}\cosh\left(x + \arg\tanh\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

Question 2.

On procède comme précédemment et on obtient cette fois :

$$\begin{cases} Ae^{\varphi} = a+b \\ Ae^{-\varphi} = b-a \end{cases}$$

On trouve cette fois que le système n'admet de solution que pour $|b| > |a|$ et elles s'écrivent alors : $\varphi = \arg\tanh\frac{a}{b}$ et $A = \operatorname{sgn}(b-a)\times\sqrt{b^2-a^2}$.

A et φ existent si, et seulement si : $|b| > |a|$ et on a alors :

$\varphi = \arg\tanh\frac{a}{b}$ et $A = \operatorname{sgn}(b-a)\times\sqrt{b^2-a^2}$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cosh(x) + b\sinh(x) = \operatorname{sgn}(b-a)\times\sqrt{b^2-a^2}\cosh\left(x + \arg\tanh\left(\frac{a}{b}\right)\right)$$