On considère A, B, C et D quatre points distincts deux à deux de l'espace.

1. En écrivant les différences $AC^2 - AD^2$ et $BC^2 - BD^2$ sous forme de produits scalaires, démontrer que l'on a :
$$(AB) \text{ et } (CD) \text{ orthogonales } \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

2. Soit maintenant ABCD un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD), d'une part, et les droites (BC) et (AD), d'autre part, soient orthogonales. Montrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

Analyse

Un exercice simple qui permet de (re ?)découvrir une caractérisation intéressante de l'orthogonalité de deux droites dans l'espace. La deuxième question est une application directe de la première.

Résolution

1. Comme suggéré, nous nous intéressons aux différences $AC^2 - AD^2$ et $BC^2 - BD^2$.

   On a :
$$AC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
   et :
$$BC^2 - BD^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right).\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$$

On en tire alors :

$$\begin{aligned}\left(AC^2+BD^2\right)-\left(AD^2+BC^2\right)&=\left(AC^2-AD^2\right)-\left(BC^2-BD^2\right)\\&=\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\\&=\overrightarrow{DC}.\left[\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\right]\\&=\overrightarrow{DC}.\left[\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}\right)\right]\\&=\overrightarrow{DC}.\left(2\overrightarrow{AB}\right)\\&=2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant des vecteurs directeurs des droites (CD) et (AB) respectivement, on a, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}&(AB) \text{ et } (CD) \text{ orthogonales}\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0\\&\Leftrightarrow \left(AC^2+BD^2\right)-\left(AD^2+BC^2\right)\\&\Leftrightarrow AC^2+BD^2=AD^2+BC^2\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ orthogonales} \Leftrightarrow AC^2+BD^2=AD^2+BC^2}$$

2. D'après la question précédente, on a :

$$(AB) \text{ et } (CD) \text{ orthogonales} \Rightarrow AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$
$$(BC) \text{ et } (AD) \text{ orthogonales} \Rightarrow BA^2+CD^2=BD^2+CA^2$$

On tire des deux égalités : $AD^2+BC^2=BA^2+CD^2$, que nous récrivons :

$$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$$

La question précédente nous permet alors de conclure que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

Si, dans un tétraèdre ABCD, les droites (AB) et (CD), d'une part, (BC) et (AD), d'autre part, sont orthogonales, alors les droites (AC) et (BD) sont également orthogonales.

Le résultat obtenu peut être énoncé de façon plus générale en remarquant qu'un tétraèdre comporte trois couples d'arêtes opposées :

Si, dans un tétraèdre, il y a deux couples d'arêtes opposées orthogonales, alors il en va de même pour le troisième couple d'arêtes opposées.