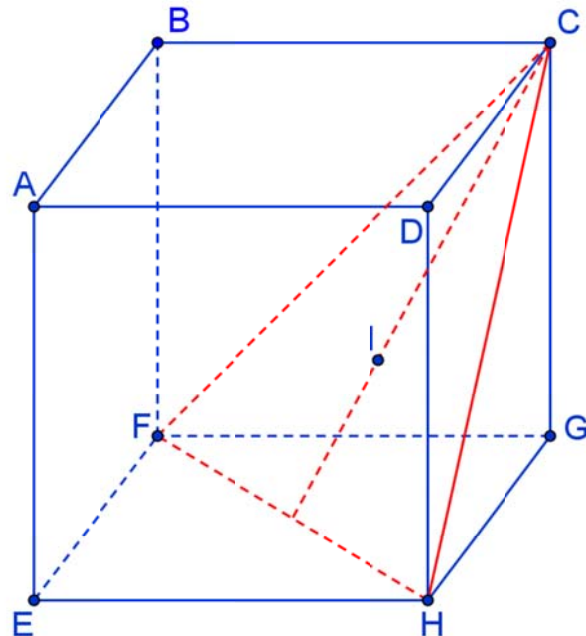


On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a .
On note I l'isobarycentre du triangle CFH .



1. Montrer que le triangle CFH est équilatéral.
2. Prouver que les points A , G et I appartiennent au plan médiateur de $[CH]$ et au plan médiateur de $[CF]$.
3. En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I .

(D'après BAC E – 1989)

Analyse

Un exercice sur l'orthogonalité dans l'espace qui met l'accent sur la notion de plan médiateur. Seule la troisième question requiert un peu de précision.

Résolution

1. Les côtés du triangle CFH sont des diagonales de faces du cube. Toutes les faces du cube sont des carrés de côté a et de diagonale $\sqrt{2}a$. Il vient donc immédiatement :

$$CF = FH = HC = \sqrt{2}a$$

Le triangle CFH est équilatéral.

2. Rappelons que le plan médiateur d'un segment dans l'espace est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

[AC] est une diagonale du carré ADCB. On a donc : $AC = \sqrt{2}a$.

[AH] est une diagonale du carré ADHE. On a donc : $AH = \sqrt{2}a$.

Comme $AC = AH$, le point A appartient au plan médiateur du segment [CH].

[GC] et [GH] sont deux côtés du carré DCGH. On a donc $GC = GH = a$.

Comme $GC = GH$, le point G appartient au plan médiateur du segment [CH].

Enfin, le point I étant l'isobarycentre du triangle CFH qui est équilatéral, il en est le point d'intersection des médiatrices. En particulier, I appartient à la médiatrice du segment [CH] dans le plan (CFH). On a donc $IC = IH$ et le point I appartient au plan médiateur du segment [CH].

En raisonnant de façon similaire avec le segment [CF], on montre que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de ce segment.

Les points A, G et I appartiennent aux plans médiateurs des segments [CH] et [CF].

3. Notons \mathcal{P} et \mathcal{Q} les plans médiateurs des segments [CH] et [CF] respectivement.

Ils admettent pour vecteurs normaux \overline{CH} et \overline{CF} respectivement. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} se coupent suivant une droite. Comme les points A, G et I appartiennent à l'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{Q} (cf. la question précédente), on en déduit immédiatement que la droite (AG) passe par le point I.

Le plan \mathcal{P} passe par le milieu du segment [CH] et est perpendiculaire à la droite (CH). Toute droite de \mathcal{P} est donc orthogonale à la droite (CH).

A et G étant deux points du plan \mathcal{P} , on déduit de ce qui précède que la droite (AG) est orthogonale à la droite (CH).

En raisonnant de façon similaire avec le plan \mathcal{C} et le segment $[CF]$, on établit que la droite (AG) est orthogonale à la droite (CF) .

La droite (AG) étant orthogonale aux deux droites sécantes (CH) et (CF) , on en déduit immédiatement qu'elle est perpendiculaire au plan (CFH) .

En définitive :

La droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) et passe par le point I de ce plan.

