On suppose que l'espace est rapporté à un repère orthonormal direct. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x+2y+3z=4$.

Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

Analyse

Un exercice classique sur l'orthogonalité dans l'espace où il convient, dans un premier temps, de caractériser simplement le projeté orthogonal d'un point quelconque de l'espace sur le plan considéré.

Résolution

Soit $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ un point de l'espace et $m(x, y, z)$ son projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur orthogonal au plan $\mathscr{P}$.

Le point *m* est caractérisé par :

$$\begin{cases} m \in \mathscr{P} \\ \overrightarrow{m\mathrm{M}} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{cases}$$

Remarque : cette caractérisation est en particulier valable pour un point du plan $\mathscr{P}$.

Comme le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation $x+2y+3z=4$, on a immédiatement, par exemple :

$$\vec{n}(1\,;2\,;3)$$

On a ensuite : $\overrightarrow{m\mathrm{M}}(\mathrm{X}-x\,;\mathrm{Y}-y\,;\mathrm{Z}-z)$ et, finalement :

$$\begin{cases} m \in \mathscr{P} \\ \overrightarrow{m\mathrm{M}} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ \dfrac{\mathrm{X}-x}{1}=\dfrac{\mathrm{Y}-y}{2}=\dfrac{\mathrm{Z}-z}{3} \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne : $y=2(x-\mathrm{X})+\mathrm{Y}=2x-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ et $z=3(x-\mathrm{X})+\mathrm{Z}=3x-3\mathrm{X}+\mathrm{Z}$.
En remplaçant *y* et *z* par ces expressions dans la première équation, on obtient alors :

$$x+2(2x-2\mathrm{X}+\mathrm{Y})+3(3x-3\mathrm{X}+\mathrm{Z})=4$$

Soit : $14x=13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4$.

Finalement :

$$\boxed{x=\frac{1}{14}(13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
y&=2x-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}\\
&=2\times\frac{1}{14}(13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}\\
&=\frac{1}{7}(13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4-14\mathrm{X}+7\mathrm{Y})\\
&=\frac{1}{7}(-\mathrm{X}+5\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)
\end{aligned}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{7}(-\mathrm{X}+5\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
z&=3x-3\mathrm{X}+\mathrm{Z}\\
&=3\times\frac{1}{14}(13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)-3\mathrm{X}+\mathrm{Z}\\
&=\frac{1}{14}(39\mathrm{X}-6\mathrm{Y}-9\mathrm{Z}+12-42\mathrm{X}+14\mathrm{Z})\\
&=\frac{1}{14}(-3\mathrm{X}-6\mathrm{Y}+5\mathrm{Z}+12)
\end{aligned}$$

$$\boxed{z=\frac{1}{14}(-3\mathrm{X}-6\mathrm{Y}+5\mathrm{Z}+12)}$$

Résultat final

La projection orthogonale p sur le plan d'équation $x+2y+3z=4$ est définie par :

$$p:\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\mapsto m(x,y,z)\text{ où }\begin{cases}x=\frac{1}{14}(13\mathrm{X}-2\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)\\ y=\frac{1}{7}(-\mathrm{X}+5\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+4)\\ z=\frac{1}{14}(-3\mathrm{X}-6\mathrm{Y}+5\mathrm{Z}+12)\end{cases}$$