On suppose que l'espace est rapporté à un repère orthonormal direct.

Donner une équation de la sphère $\mathscr{S}$ contenant les cercles :

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2 \end{cases}$$

Analyse

On ne partira pas de l'équation générale d'une sphère dans l'espace … Il convient, dans un premier temps, de s'arrêter sur les systèmes d'équations simples des deux cercles fournis. En en déduit que le centre de la sphère se trouve sur une certaine droite.

Résolution

Notons Ω le centre de la sphère $\mathscr{S}$.

Le cercle défini par le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$$

est inclus dans le plan d'équation $z=0$ et son centre $\Omega_1(0\,;0\,;0)$ est le projeté orthogonal de Ω sur ce plan. On en déduit que Ω appartient à la perpendiculaire au plan d'équation $z=0$ et passant par $\Omega_1(0\,;0\,;0)$. Il s'agit simplement de l'axe des cotes.

Ainsi, on en déduit que les coordonnées du point Ω sont de la forme : $\Omega(0\,;0\,;k)$ où k est un réel à déterminer.

Remarque : on aurait abouti au même résultat en raisonnant avec le second cercle.

Le résultat précédent nous permet d'affirmer, l'espace étant rapporté à une repère orthonormal, qu'une équation de la sphère $\mathscr{S}$ est de la forme :

$$x^2+y^2+(z-k)^2=R^2$$

où R désigne le rayon de $\mathscr{S}$.

L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z=0$ est le cercle défini par :

$$\begin{cases} x^2+y^2+k^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - k^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ce cercle est le premier des deux cercles fourni dans l'énoncé. On a donc :

$$\boxed{R^2 - k^2 = 9}$$

De façon similaire, l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z = 2$ est le cercle défini par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (2-k)^2 = R^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - (2-k)^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ce cercle est le second des deux cercles fourni dans l'énoncé. On a donc :

$$\boxed{R^2 - (2-k)^2 = 25}$$

Les deux résultats précédents nous donnent le système :

$$\begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ R^2 - (2-k)^2 = 25 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ R^2 - (2-k)^2 = 25 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ R^2 - (2-k)^2 - (R^2 - k^2) = 25 - 9 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ k^2 - (2-k)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ 4k - 4 = 16 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} R^2 - k^2 = 9 \\ k = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = 34 \\ k = 5 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} R = \sqrt{34} \\ k = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

La sphère $\mathscr{S}$ est donc la sphère de centre $\Omega(0\,;0\,;5)$ et de rayon $\sqrt{34}$.

Une équation en est :

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 34$$

Résultat final

Une équation de la sphère contenant les cercles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

est :

$$x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 34$$