On se donne dans l'espace les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ définies par :

$$\mathscr{D}\begin{cases} x-2y=1 \\ y-z=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$$

où a est un réel.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient coplanaires.
2. Donner alors une équation du plan contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Analyse

A partir des équations cartésiennes fournies, on obtient facilement des représentations paramétriques des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Ainsi, on dispose de deux vecteurs directeurs et on peut conclure eu non parallélisme des deux droites. Dans ces conditions, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires si, et seulement si, elles sont sécantes …

Résolution

Question 1.

En écrivant :

$$\mathscr{D}\begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \\ z=z \end{cases}$$

on obtient une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

En particulier, le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;1)$ (ses coordonnées sont les coefficients de « z » dans la représentation paramétrique ci-dessus) est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

De façon similaire, on a :

$$\mathscr{D}'\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+1 \\ x-2y=-2z+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z+1 \\ 3y=z+1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}(z+1-a)-z+1 \\ y=\dfrac{1}{3}(z+1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}z+\dfrac{1}{3}(2+a) \\ y=\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{3}(1-a) \\ z=z \end{cases}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}'$.

En particulier, le vecteur $\vec{v}(4\,;-1\,;-3)$ (ses coordonnées sont les coefficients de « z » dans la représentation paramétrique ci-dessus multipliés par -3) est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.
On en déduit donc qu'elles sont coplanaires si, et seulement si, elles sont sécantes.

Un point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ de l'espace appartient à $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous résolvons :

$$\begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

On a facilement :

$$\begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \\ 2z+1+z+2+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \\ 4z+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z+2 \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On cherche alors a de telle sorte que l'équation $x-2y+2z=a$ soit vérifiée.

Il vient donc : $0-2\times\frac{3}{2}+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=a \Leftrightarrow -3-1=a \Leftrightarrow a=-4$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires si, et seulement si, on a : $a=-4$.
Dans ce cas, elles sont sécantes et se coupent au point $\mathrm{A}\left(0\,;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Question 2.

Notons $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, on a immédiatement, pour tout point M de l'espace :

$$\mathrm{M}\in\mathscr{P} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{u},\vec{v}\right)=0$$

Avec $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$, $\mathrm{A}\left(0\,;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\vec{u}(2\,;1;1)$ et $\vec{v}(4\,;-1;-3)$, il vient :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{u},\vec{v}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ y-\frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z+\frac{1}{2} & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\times1\times(-3)+\left(y-\frac{3}{2}\right)\times1\times4+\left(z+\frac{1}{2}\right)\times2\times(-1)-\left(z+\frac{1}{2}\right)\times1\times4-x\times1\times(-1)-\left(y-\frac{3}{2}\right)\times2\times(-3)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y-6-2z-1-4z-2+x+6y-9=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+10y-6z-18=0$$

$$\Leftrightarrow x-5y+3z+9=0$$

Pour $a=-4$, une équation cartésienne du plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est :

$$x-5y+3z+9=0$$