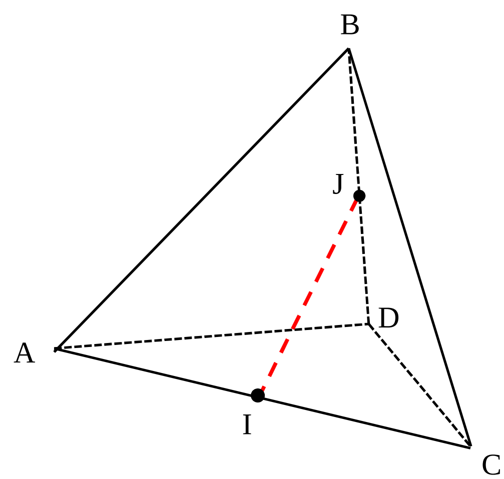
Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur *a*.

Déterminer, en fonction de *a*, la distance entre deux arêtes non coplanaires.

Analyse

Un des résultats très classiques obtenus dans le tétraèdre régulier. Les outils mis en œuvre sont ceux de la classe de Terminale S et il convient de savoir retrouver ce résultat rapidement.

Résolution



Dans un premier temps, nous considérons les deux arêtes non coplanaires $[AC]$ et $[BD]$ ainsi que leurs milieux respectifs, les points I et J.

Nous allons montrer que la distance entre les droites (AC) et (BD) est égale à la longueur du segment $[IJ]$.

Montrons d'abord que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AC) et (BD).

On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AC}\right)$$

Dans le triangle équilatéral ABC, le point I, comme milieu du côté $[AC]$, est le pied de la hauteur issue de B. Les droites (IB) et (AC) sont donc perpendiculaires et on a immédiatement $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
De même, dans le triangle équilatéral ABD, le point I est le pied de la hauteur issue de D. Les droites (ID) et (AC) sont donc perpendiculaires et on a immédiatement $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AD} = 0$.

On déduit de ce qui précède : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AC}\right) = 0$. Les droites (IJ) et (AC) sont donc perpendiculaires.

On montre de façon analogue que les droites (IJ) et (BD) sont également perpendiculaires.

En définitive, la droite (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BD). Les points I et J appartenant respectivement aux droites (AC) et (BD), la distance entre les droites (AC) et (BD) est donc la longueur du segment $[IJ]$.

Comme la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (BD), le triangle IJB est rectangle en J.

Comme J est le milieu du segment $[BD]$, on a : $JB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a$.
Par ailleurs, dans le triangle équilatéral ABC, le segment $[IB]$ est la hauteur issue du sommet B. On a classiquement : $IB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IB^2 = IJ^2 + JB^2$$

Soit : $IJ^2 = IB^2 - JB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$.

D'où, finalement : $IJ = \frac{1}{\sqrt{2}}a$.

Résultat final

Dans un tétraèdre régulier, la distance entre deux arêtes non coplanaire est égale à la longueur de l'arête divisée par $\sqrt{2}$.