Dans un repère orthonormé direct, on donne les droites :

$$D:\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \text{ et } D':\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire commune à D et D' (on déterminera $\{H\}=D\cap\Delta$ et $\{K\}=D'\cap\Delta$).

Analyse

Déterminer les coordonnées des points H et K revient à déterminer les valeurs de 6 inconnues aux total. Pour obtenir les équations permettant de déterminer ces 6 valeurs, on traduit les conditions que doivent satisfaire les points H et K :

- H est un point de *D*.
- K est un point de D'.
- La droite Δ est perpendiculaire aux droites D et D'.

Résolution

Dans un premier temps, nous allons déterminer des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de D et D' respectivement.

A partir du système d'équations cartésiennes caractérisant *D*, on peut facilement obtenir une représentation paramétrique de cette droite :

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1-z \\ 2x+y=z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=-1-z \\ 2x+y+(x-y)=z+(-1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1-z \\ 3x=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1+x+z \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{1}{3}+z \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}+z \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} + z \\ z = z \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la droite D passe par le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;0\right)$ et admet pour vecteur directeur : $\vec{u}\left(0\,;1\,;1\right)$.
On peut également effectuer la remarque suivante : tous les points de la droite D ont pour abscisse $-\frac{1}{3}$. La droite D est incluse dans le plan d'équation $x = -\frac{1}{3}$.

De façon similaire :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -z \\ x - y = z + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = z + \dfrac{1}{2} \\ x + 2y - (x - y) = -z - \left(z + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = z + \dfrac{1}{2} \\ 3y = -2z - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + y + z \\ y = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + -\dfrac{2}{3}z - \dfrac{1}{6} + z \\ y = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}z \\ y = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}z \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'une représentation paramétrique de D' est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}z \\ y = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3}z \\ z = z \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la droite D' passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées : $\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;1\right)$. Pour simplifier les calculs, nous retenons : $\vec{u}\,'\left(1\,;-2\,;3\right)$.

Les points H et K sont parfaitement déterminés par le système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{H} \in D \\ \mathrm{K} \in D' \\ (\mathrm{HK}) \perp D \\ (\mathrm{HK}) \perp D' \end{cases}$$

En posant $\mathrm{H}(x_\mathrm{H} ; y_\mathrm{H} ; z_\mathrm{H})$ et $\mathrm{K}(x_\mathrm{K} ; y_\mathrm{K} ; z_\mathrm{K})$, on a $\overrightarrow{\mathrm{HK}}(x_\mathrm{K} - x_\mathrm{H} ; y_\mathrm{K} - y_\mathrm{H} ; z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H})$ puis, le repère considéré étant orthonormé, on a :

$$\begin{cases} (\mathrm{HK}) \perp D \\ (\mathrm{HK}) \perp D' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{HK}}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{HK}}.\vec{u}\,' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_\mathrm{K} - x_\mathrm{H}) \times 0 + (y_\mathrm{K} - y_\mathrm{H}) \times 1 + (z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H}) \times 1 = 0 \\ (x_\mathrm{K} - x_\mathrm{H}) \times 1 + (y_\mathrm{K} - y_\mathrm{H}) \times (-2) + (z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H}) \times 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_\mathrm{K} - y_\mathrm{H} + z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H} = 0 \\ x_\mathrm{K} - x_\mathrm{H} - 2y_\mathrm{K} + 2y_\mathrm{H} + 3z_\mathrm{K} - 3z_\mathrm{H} = 0 \end{cases}$$

En utilisant les représentations paramétriques des droites D et D' obtenues précédemment, il vient :

$$\begin{cases} \mathrm{H} \in D \\ \mathrm{K} \in D' \\ (\mathrm{HK}) \perp D \\ (\mathrm{HK}) \perp D' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\mathrm{H} = -\dfrac{1}{3} \\ y_\mathrm{H} = \dfrac{2}{3} + z_\mathrm{H} \\ x_\mathrm{K} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} z_\mathrm{K} \\ y_\mathrm{K} = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3} z_\mathrm{K} \\ y_\mathrm{K} - y_\mathrm{H} + z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H} = 0 \\ x_\mathrm{K} - x_\mathrm{H} - 2y_\mathrm{K} + 2y_\mathrm{H} + 3z_\mathrm{K} - 3z_\mathrm{H} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} x_\mathrm{H} = -\dfrac{1}{3} \\ y_\mathrm{H} = \dfrac{2}{3} + z_\mathrm{H} \\ x_\mathrm{K} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} z_\mathrm{K} \\ y_\mathrm{K} = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3} z_\mathrm{K} \\ -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3} z_\mathrm{K} - \left(\dfrac{2}{3} + z_\mathrm{H}\right) + z_\mathrm{K} - z_\mathrm{H} = 0 \\ \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} z_\mathrm{K}\right) - \left(-\dfrac{1}{3}\right) - 2\left(-\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{3} z_\mathrm{K}\right) + 2\left(\dfrac{2}{3} + z_\mathrm{H}\right) + 3z_\mathrm{K} - 3z_\mathrm{H} = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations ne comportent plus que les inconnues z_{H} et z_{K}. Nous les déterminons en résolvant séparément le système correspondant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}-\frac{2}{3}z_{\mathrm{K}}-\left(\frac{2}{3}+z_{\mathrm{H}}\right)+z_{\mathrm{K}}-z_{\mathrm{H}}=0 \\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z_{\mathrm{K}}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-2\left(-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}z_{\mathrm{K}}\right)+2\left(\frac{2}{3}+z_{\mathrm{H}}\right)+3z_{\mathrm{K}}-3z_{\mathrm{H}}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2z_{\mathrm{H}}+\frac{1}{3}z_{\mathrm{K}}=\frac{5}{6} \\ -z_{\mathrm{H}}+\frac{14}{3}z_{\mathrm{K}}=-\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{K}}=-\frac{5}{2} \\ 3z_{\mathrm{H}}-14z_{\mathrm{K}}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{K}}-2\left(3z_{\mathrm{H}}-14z_{\mathrm{K}}\right)=-\frac{5}{2}-2\times 7 \\ 6z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{K}}=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z_{\mathrm{K}}+28z_{\mathrm{K}}=-\frac{5}{2}-14 \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\left(z_{\mathrm{K}}-\frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27z_{\mathrm{K}}=-\frac{33}{2} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\left(z_{\mathrm{K}}-\frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{2} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\left(z_{\mathrm{K}}-\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\left(z_{\mathrm{K}}-\frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\left(-\frac{11}{18}-\frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{56}{18}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=-\frac{14}{27} \end{cases}$$

On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=-\frac{1}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=\frac{2}{3}+z_{\mathrm{H}} \\ x_{\mathrm{K}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z_{\mathrm{K}} \\ y_{\mathrm{K}}=-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}z_{\mathrm{K}} \\ z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=-\frac{14}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=-\frac{1}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=\frac{2}{3}-\frac{14}{27} \\ x_{\mathrm{K}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{11}{18}\right) \\ y_{\mathrm{K}}=-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{11}{18}\right) \\ z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=-\frac{14}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=-\frac{1}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=\frac{4}{27} \\ x_{\mathrm{K}}=\frac{7}{54} \\ y_{\mathrm{K}}=\frac{13}{54} \\ z_{\mathrm{K}}=-\frac{11}{18} \\ z_{\mathrm{H}}=-\frac{14}{27} \end{cases}$$

En définitive, on a :

$$\mathrm{H}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{27};-\frac{14}{27}\right) \text{ et } \mathrm{K}\left(\frac{7}{54};\frac{13}{54};-\frac{11}{18}\right)$$

Il en découle : $\overrightarrow{HK}\left(\frac{7}{54}-\left(-\frac{1}{3}\right);\frac{13}{54}-\frac{4}{27};-\frac{11}{18}-\left(-\frac{14}{27}\right)\right)$, soit :

$$\overrightarrow{HK}\left(\frac{25}{54};\frac{5}{54};-\frac{5}{54}\right)$$

Il vient : $\overrightarrow{HK}=\frac{5}{54}\vec{w}$ avec $\vec{w}(5;1;-1)$.

Finalement la droite (HK) est la droite passant par H et de vecteur directeur $\vec{w}(5;1;-1)$.

Elle admet ainsi la représentation paramétrique suivante :

$$\Delta:\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+5t \\ y=\frac{4}{27}+t \\ z=-\frac{14}{27}-t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Résultat final

Une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire commune aux droites

$$D:\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \text{ et } D':\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

est :

$$\Delta:\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+5t \\ y=\frac{4}{27}+t \\ z=-\frac{14}{27}-t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Complément

Disposant des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$, on calcule facilement la longueur HK correspondant à la distance entre les droites D et D'.

En tenant compte de $\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \frac{5}{54}\vec{w}$ et $\vec{w}(5\,;1\,;-1)$, il vient :

$$\mathrm{HK} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{HK}}\right\| = \left\|\frac{5}{54}\vec{w}\right\| = \frac{5}{54}\|\vec{w}\| = \frac{5}{54}\sqrt{5^2+1^2+1^2} = \frac{5\sqrt{27}}{54} = \frac{5\times 3\sqrt{3}}{54} = \frac{5\sqrt{3}}{18}$$

$$\boxed{d(D,D') = \frac{5\sqrt{3}}{18}}$$