Dans un repère orthonormé direct, on donne la droite :

$$D:\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$$

Déterminer la distance d'un point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ à la droite D.

Analyse

On peut procéder de diverses façons et nous développons ici deux approches :

- Dans la première, nous utilisons la formule du cours.
- Dans la seconde, nous ramenons le problème à un problème plus simple : celui du calcul de la distance d'un point à une droite intersection de deux plans orthogonaux.

Résolution

1ère approche

Si nous notons $d(\mathrm{M}, D)$ la distance du point M à la droite D, nous avons classiquement :

$$d(\mathrm{M}, D)=\frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

où A et $\vec{u}$ sont respectivement un point et un vecteur directeur de la droite D.

Pour obtenir A et $\vec{u}$, nous pouvons, à partir du système d'équations cartésiennes de D, obtenir une représentation paramétrique de cette droite :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-3+z \\ x-y=-4-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-(x-y)=-3+z-(-4-2z) \\ x-y=-4-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=1+3z \\ x=-4+y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3}+z \\ x=-4+y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3}+z \\ x=-4+\dfrac{1}{3}+z-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{3}-z \\ y=\dfrac{1}{3}+z \end{cases}$$

On a ainsi la représentation paramétrique suivante de D :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{11}{3} - z \\ y = \dfrac{1}{3} + z \qquad\qquad z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que la droite D passe par le point $\mathrm{A}\left(-\dfrac{11}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;0\right)$ et admet le vecteur $\vec{u}(-1\,;1\,;1)$ pour vecteur directeur.

On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\left(x+\dfrac{11}{3}\,;\,y-\dfrac{1}{3}\,;\,z\right)$ et on obtient facilement :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u} \left| \begin{array}{l} y - z - \dfrac{1}{3} \\ -x - z - \dfrac{11}{3} \\ x + y + \dfrac{10}{3} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|^2 &= \left(y - z - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-x - z - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(x + y + \frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}\left[(3y - 3z - 1)^2 + (3x + 3z + 11)^2 + (3x + 3y + 10)^2\right] \end{aligned}$$

En tenant compte de $\|\vec{u}\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3$, il vient finalement :

$$\begin{aligned} \left(d(\mathrm{M}, D)\right)^2 &= \frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{\frac{1}{9}\left[(3y - 3z - 1)^2 + (3x + 3z + 11)^2 + (3x + 3y + 10)^2\right]}{3} \\ &= \frac{1}{27}\left[(3y - 3z - 1)^2 + (3x + 3z + 11)^2 + (3x + 3y + 10)^2\right] \end{aligned}$$

Soit :

$$d(\mathrm{M}, D) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(3y - 3z - 1)^2 + (3x + 3z + 11)^2 + (3x + 3y + 10)^2}$$

2ème approche

D'après l'énoncé, la droite D est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives $x+2y-z=-3$ et $x-y+2z=-4$.

Nous allons ici chercher le plan $\mathscr{R}$ contenant D et orthogonal au plan $\mathscr{P}$ (nous aurions tout aussi bien pu choisir le plan $\mathscr{Q}$).

Pour obtenir un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$, il nous suffit de considérer le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{n}$ où, rappelons-le, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et où $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.
On a vu ci-dessus que l'on avait $\vec{u}(-1;1;1)$ et d'après l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ dont nous disposons, il vient immédiatement $\vec{n}(1;2;-1)$.
Dans ces conditions :

$$\vec{u}\wedge\vec{n}\left|\begin{array}{l}-3\\0\\-3\end{array}\right.$$

Le vecteur de coordonnées $(1;0;1)$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$.
Une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme : $x+z+\alpha=0$.
Comme le point $\mathrm{A}\left(-\frac{11}{3};\frac{1}{3};0\right)$ appartient à $\mathscr{R}$, nous avons : $-\frac{11}{3}+0+\alpha=0$, soit $\alpha=\frac{11}{3}$.
$x+z+\frac{11}{3}=0$ est donc une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$.

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ étant orthogonaux, on a (théorème de Pythagore) :

$$\left(d(\mathrm{M},D)\right)^2=\left(d(\mathrm{M},\mathscr{P})\right)^2+\left(d(\mathrm{M},\mathscr{R})\right)^2$$

Comme nous sommes dans un repère orthonormé, il vient immédiatement :

$$d(\mathrm{M},\mathscr{P})=\frac{|x+2y-z+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-z+3|}{\sqrt{6}}\text{ et } d(\mathrm{M},\mathscr{R})=\frac{\left|x+z+\frac{11}{3}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|x+z+\frac{11}{3}\right|}{\sqrt{2}}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left(d(\mathrm{M},D)\right)^2&=\left(d(\mathrm{M},\mathscr{P})\right)^2+\left(d(\mathrm{M},\mathscr{R})\right)^2\\&=\frac{(x+2y-z+3)^2}{6}+\frac{\left(x+z+\frac{11}{3}\right)^2}{2}\\&=\frac{(x+2y-z+3)^2}{6}+\frac{(3x+3z+11)^2}{18}\end{aligned}$$

Soit :

$$d(\mathrm{M}, D)=\sqrt{\frac{(x+2y-z+3)^2}{6}+\frac{(3x+3z+11)^2}{18}}$$

On pourra, en comparant les carrés, vérifier que les deux expressions obtenues pour $d(\mathrm{M}, D)$ sont égales.

Résultat final

La distance $d(\mathrm{M}, D)$ d'un point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ à la droite

$$D:\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$$

est égale à :

$$\begin{aligned} d(\mathrm{M}, D) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(3y-3z-1)^2+(3x+3z+11)^2+(3x+3y+10)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(x+2y-z+3)^2}{6}+\frac{(3x+3z+11)^2}{18}} \end{aligned}$$