On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a,\ a \in \left]0\,;1\right[$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\left(2 - u_n\right)$$

Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0\,;1\right[$.

Analyse

Pour cette démonstration par récurrence, on a tout intérêt à noter que la suite (u_n) est définie par récurrence sous la forme : $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. L'étude de la fonction *f*, fonction polynôme du second degré, ne pose pas de difficulté particulière …

Résolution

Soit P_n la proposition « $u_n \in \left]0\,;1\right[$ ».

Puisque $u_0 = a$ et que a appartient à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$, on en déduit que la proposition P_0 est vraie.

Supposons maintenant que P_n soit vraie et intéressons-nous à P_{n+1}. Il nous faut démontrer que u_{n+1} appartient à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

On a, d'après la définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où *f* est la fonction définie par :

$$f : x \mapsto x\left(2 - x\right)$$

Etudions cette fonction sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$.
Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et on a :

$$\forall x \in \left]0;1\right[,\ f'(x) = 2 - 2x = 2\left(1 - x\right)$$

Pour tout *x* réel vérifiant $0 < x < 1$, on a : $0 < 1 - x < 1$. On en déduit que f' est strictement positive sur $\left]0\,;1\right[$ et, de fait, que la fonction *f* est strictement croissante sur cet intervalle et donc sur $\left[0\,;1\right]$.

On en déduit :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ f(0) < f(x) < f(1)$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Finalement :

$$\forall x \in]0\,;1[,\ 0 < f(x) < 1$$

En particulier, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $0 < u_n < 1$.
Donc : $0 < f(u_n) < 1$.
C'est à dire : $0 < u_{n+1} < 1$.
La proposition P_{n+1} est donc vraie.

Finalement, la proposition est vraie pour tout entier naturel *n*.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0\,;1[$$