Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{3n} - 1 \text{ est un multiple de } 7$$

Analyse

Une démonstration par récurrence assez « mécanique » où il convient de manipuler les puissances avec soin.

Résolution

Soit P_n la proposition « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

Pour $n = 0$, on a : $2^{3n} - 1 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$.
On a bien obtenu un multiple de 7. La proposition P_n est donc vraie au rang 0.

Supposons désormais que P_n soit vraie. On suppose donc que $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
On s'intéresse à $2^{3(n+1)} - 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n+3} - 1 \\
&= 2^3 \times 2^{3n} - 1 && \text{(règle de calcul sur les puissances)} \\
&= 8 \times 2^{3n} - 1 \\
&= 8 \times \left(2^{3n} - 1\right) + 7 && \text{(on fait apparaître l'expression de l'hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

Puisque $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, on peut écrire : $2^{3n} - 1 = 7k$, k étant un entier naturel.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
2^{3(n+1)} - 1 &= 8 \times \left(2^{3n} - 1\right) + 7 \\
&= 8 \times 7k + 7 \\
&= 7 \times (8k + 1)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité établit que $2^{3(n+1)} - 1$ est bien un multiple de 7.

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

On en déduit ainsi qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Résultat final

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.