On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n$$

Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geq 2^{n-1}$$

Analyse

Une démonstration par récurrence classique sur les factorielles.

Résolution

Soit P_n la proposition « $n! \geq 2^{n-1}$ ».

Pour $n=1$, on a : $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ et $0! = 1$. On a bien : $0! \geq 2^{1-1}$.
La proposition P_n est donc vraie au rang 1.

Supposons désormais que P_n soit vraie pour n, entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose donc que l'on a $n! \geq 2^{n-1}$.
On s'intéresse à $(n+1)!$.

On a : $(n+1)! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n\times (n+1) = n!\times (n+1)$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on, a : $n! \geq 2^{n-1}$.
On en déduit : $n!\times (n+1) \geq 2^{n-1}\times (n+1)$.
Mais $n \geq 1$ entraîne $n+1 \geq 2$. On en tire : $n!\times (n+1) \geq 2^{n-1}\times (n+1) \geq 2^{n-1}\times 2$.
C'est à dire : $(n+1)! \geq 2^n$ ou $(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1}$.

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

On en déduit ainsi qu'elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geq 2^{n-1}$$