On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{4-n^2}{n}$$

Etudier le sens de variation de (u_n).

Analyse

Un exercice où la forme de u_n suggère d'étudier le sens de variation d'une certaine fonction rationnelle.

Résolution

Pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $u_n = f(n) = \frac{4-n^2}{n}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f : x \mapsto \frac{4-x^2}{x}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x \times x - (4-x^2)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} \\ &= \frac{-x^2-4}{x^2} \\ &= -\frac{x^2+4}{x^2} \end{aligned}$$

Pour tout x strictement positif, on a : $x^2+4>4$ et $x^2>0$. On en déduit que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit finalement que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Résultat final

La suite (u_n) est strictement décroissante.