Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{-3n^2+5}{e^{2n}} \times \left(\frac{2,7}{e}\right)^n$$

Analyse

Un exercice où on utilise des résultats classiques en matière de limites de fonction et de limites de suites.

Résolution

Pour tout entier naturel n, on a : $\frac{-3n^2+5}{e^{2n}} = \frac{n^2}{e^{2n}} \times \left(-3+\frac{5}{n^2}\right)$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{5}{n^2}\right) = -3+0 = -3$.

Par ailleurs : $\frac{n^2}{e^{2n}} = \frac{n^2}{\left(e^n\right)^2} = \left(\frac{n}{e^n}\right)^2$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n} = 0$ (croissance comparée).

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e^n}\right)^2 = 0$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+5}{e^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{e^{2n}}\times\left(-3+\frac{5}{n^2}\right)\right) = 0\times(-3) = 0$

On a aussi : $e > 2,7$. Donc : $\frac{2,7}{e} \in \left]0;1\right[$. On en tire immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2,7}{e}\right)^n = 0$.

En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Résultat final

La suite (u_n) admet une limite nulle en $+\infty$.