

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n(\sqrt[n]{a} - 1) \right) \text{ où } a \text{ est un réel strictement positif.}$$

Analyse

On a le résultat classique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, que l'on peut rapidement retrouver en déterminant

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\sqrt[n]{a} \right) \right)$. Nous sommes donc confrontés à une forme indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

On la lève en transformant l'écriture de la puissance et en faisant apparaître des expressions dont les limites en $+\infty$ sont connues ou en ayant recours à la notion d'équivalents de fonctions.

Résolution

Préambule

On a : $\sqrt[n]{a} - 1 = a^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln a}{n}} - 1$.

A partir de cette expression, diverses approches de calcul de la limite demandée sont possibles.

1^{ère} approche : utiliser des équivalents de fonctions

On sait que l'on a, au voisinage de 0 : $e^x - 1 \sim x$. Comme, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\ln a}{n}$ est un

infinitement petit, on peut écrire : $e^{\frac{\ln a}{n}} - 1 \sim \frac{\ln a}{n}$.

On en déduit alors : $n \left(e^{\frac{\ln a}{n}} - 1 \right) \sim n \left(\frac{\ln a}{n} \right) = \ln a$. C'est à dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(e^{\frac{\ln a}{n}} - 1 \right) \right) = \ln a$.

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) \right) = \ln a$.

2^{ème} approche : faire apparaître une limite connue

Si l'on ne dispose pas de la notion d'équivalent, on peut traiter le problème en introduisant la suite réelle (h_n) de terme général défini par : $\sqrt[n]{a} - 1 = h_n$.

Comme on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$.

A partir de $\sqrt[n]{a} - 1 = h_n = e^{\frac{\ln a}{n}} - 1$, on obtient facilement l'expression de n en fonction de h_n :

$$\begin{aligned}h_n &= e^{\frac{\ln a}{n}} - 1 \\ \Leftrightarrow e^{\frac{\ln a}{n}} &= h_n + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\ln a}{n} &= \ln(h_n + 1) \\ \Leftrightarrow n &= \frac{\ln a}{\ln(h_n + 1)}\end{aligned}$$

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n(\sqrt[n]{a} - 1) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln a}{\ln(h_n + 1)} h_n \right) = \ln a \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{h_n}{\ln(h_n + 1)} \right)$.

Or, on dispose du résultat classique : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(h_n + 1)}{h_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{h_n}{\ln(h_n + 1)} \right) = 1$.

D'où, finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n(\sqrt[n]{a} - 1) \right) = \ln a$

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n(\sqrt[n]{a} - 1) \right) = \ln a$$