

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergente de limite  $l$ .

1. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l) \right) = 0$  ;

2. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_1^n p u_p \right)$ .

---

## Analyse

L'essentiel du travail se situe au niveau de la première question.

On utilise la définition de la convergence d'une suite réelle en cherchant à majorer  $|v_n|$  où

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l)$ .

La deuxième limite découle immédiatement du premier résultat.

---

## Résolution

### Question 1.

On pose donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l)$  et on considère :  $|v_n| = \frac{1}{n^2} \left| \sum_1^n p(u_p - l) \right|$ .

Soit alors  $\varepsilon$  un réel quelconque strictement positif.

On a d'abord :

$$|v_n| = \frac{1}{n^2} \left| \sum_1^n p(u_p - l) \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_1^n p |u_p - l|$$

Comme la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $l$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Pour  $n > N$ , on peut alors « couper » la somme  $\sum_1^n p |u_p - l|$  en deux comme suit :

$$\sum_1^n p |u_p - l| = \sum_1^N p |u_p - l| + \sum_{N+1}^n p |u_p - l|$$

Chacun des deux termes peut être facilement majoré :

- Soit  $A = \max \{|u_1 - l|, |u_2 - l|, \dots, |u_N - l|\}$ .  
On a :  $\sum_1^N p |u_p - l| \leq A \sum_1^N p = A \frac{N(N-1)}{2}$ .
- Par ailleurs :  $\sum_{N+1}^n p |u_p - l| \leq \varepsilon \sum_{N+1}^n p < \varepsilon \sum_1^n p = \varepsilon \frac{n(n-1)}{2}$  et  $\varepsilon \frac{n(n-1)}{2} < \varepsilon \frac{n^2}{2}$ .

Il vient donc :

$$\sum_1^n p |u_p - l| = \sum_1^N p |u_p - l| + \sum_{N+1}^n p |u_p - l| < A \frac{N(N-1)}{2} + \varepsilon \frac{n^2}{2}$$

D'où :

$$|v_n| \leq \frac{1}{n^2} \sum_1^n p |u_p - l| < A \frac{N(N-1)}{2n^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ces inégalités sont valables pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à  $N$ .

$A$  et  $N$  étant fixés (dès lors que  $\varepsilon$  l'est), le terme  $A \frac{N(N-1)}{2n^2}$  peut-être rendu aussi petit que

souhaité puisque l'on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A \frac{N(N-1)}{2n^2} \right) = 0$ . En particulier :

$$\exists N' \forall n \in \mathbb{N}, n > N' \Rightarrow A \frac{N(N-1)}{2n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

En posant alors  $M = \max \{N, N'\}$ , il vient :

$$n > M \Rightarrow |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} / n > M \Rightarrow |v_n| < \varepsilon$$

C'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_1^n p (u_p - l) \right) = 0$$

## Question 2.

On va naturellement ici utiliser le résultat de la question précédente.

Pour cela, on réécrit le terme général de la suite  $\left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pu_p\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  comme suit :

$$\frac{1}{n^2} \sum_1^n pu_p = \frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l) + \frac{1}{n^2} \sum_1^n pl$$

On a :  $\frac{1}{n^2} \sum_1^n pl = \frac{l}{n^2} \sum_1^n p = \frac{l}{2} \frac{n(n-1)}{n^2}$  et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pl\right) = \frac{l}{2}$ .

Comme, d'après la première question,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l)\right) = 0$ , on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pu_p\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l)\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pl\right) = 0 + \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pu_p\right) = \frac{l}{2}$$

---

## Résultat final

Pour toute suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite  $l$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n p(u_p - l)\right) = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_1^n pu_p\right) = \frac{l}{2}$$