

Soit a un réel.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(a) + E(2a) + E(3a) + \dots + E(na)}{n^2}$.

Où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x .

Analyse

On a intérêt ici à travailler avec la définition de la partie entière.

Un calcul en considérant a entier permet de se faire une première idée du résultat général.

Résolution

Pour a entier, on a immédiatement :

$$\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, E(ka) = ka$$

On en tire, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} \frac{E(a) + E(2a) + E(3a) + \dots + E(na)}{n^2} &= \frac{a + 2a + 3a + \dots + na}{n^2} \\ &= \frac{a}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2} a \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(a) + E(2a) + E(3a) + \dots + E(na)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} a = \frac{1}{2} a = \frac{a}{2}$$

Pour a réel quelconque, nous allons utiliser l'encadrement suivant :

$$\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, ka - 1 < E(ka) \leq ka$$

En sommant pour k variant de 1 à n :

$$(a-1) + (2a-1) + \dots + (na-1) < E(a) + E(2a) + \dots + E(na) \leq a + 2a + \dots + na$$

Soit :

$$a(1+2+\dots+n) - n < E(a) + E(2a) + \dots + E(na) \leq a(1+2+\dots+n)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}a - n < E(a) + E(2a) + \dots + E(na) \leq \frac{n(n+1)}{2}a$$

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{1}{n} < \frac{E(a) + E(2a) + \dots + E(na)}{n^2} \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}a$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}a = \frac{a}{2}$.

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(a) + E(2a) + \dots + E(na)}{n^2} = \frac{a}{2}$$

Résultat final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(a) + E(2a) + \dots + E(na)}{n^2} = \frac{a}{2}$$